

EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2021年12月18日（土）

4分野受験 午後1時30分～午後4時10分

3分野受験 午後1時30分～午後3時30分

2分野受験 午後1時30分～午後2時50分

1分野受験 午後1時30分～午後2時10分

* 受験分野は、各大学・高専の指示に従ってください。

受験上の注意

- (1) 机の右上に学生証を提示すること。
- (2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
- (3) 問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- (4) マークには**HB**または**B**の鉛筆（またはシャープペンシル）を使用すること。
- (5) 解答用紙を汚損したときは、手を挙げて監督者に知らせること。
- (6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離さないこと。
- (7) 試験開始40分後から退室を認める。
- (8) 問題冊子は持ち帰ること。
- (9) 気分が悪くなった場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- (10) その他、監督者の指示に従うこと。

解答上の注意

- (1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び、その記号を解答用紙にマークすること。ただし、解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には⑩をマークすること。例えば、 $\boxed{23}$ と表示してある問いに対して解答記号④を選ぶ場合は、次のようにマークすること。

23	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	a	b	●	d	e	f	g	h	i
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (2) 破線で囲まれた番号は、前に現れた番号であることを表す。したがって、例えば $\boxed{23}$ には $\boxed{23}$ と同じ解答が入る。
- (3) 解答が数式の場合、 $\boxed{23}$ は ($\boxed{23}$) という意味である。したがって、例えば $\boxed{23}$ の解答が $-x - 1$ の場合、 $x^2 - \boxed{23}$ は $x^2 - (-x - 1)$ を意味する。
- (4) \mathbb{R} は実数全体の集合とする。
- (5) $\log x$ は x の自然対数、すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す。
- (6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は、それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し、 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある。各逆関数がかかる値の範囲（値域）は、 $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ とする。

目次

第1分野	微分積分	3
第2分野	線形代数	13
第3分野	常微分方程式	23
第4分野	確率・統計	33

第1分野 微分積分

〔問1～問5：解答番号 ～ 〕

問1 次の2つの極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + \cos x) \cos x - 3}{2x^2} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log \left(\sqrt{1 + ex^2} - 1 \right) - \log x \right\} = \boxed{2}$$

・ の解答群

- | | | | | |
|-------|------------|------------------|------------------|-------------------|
| ① 0 | ② ∞ | ③ $-\infty$ | | |
| ④ 1 | ⑤ 2 | ⑥ $\frac{1}{2}$ | ⑦ $\frac{1}{3}$ | ⑧ $\frac{2}{3}$ |
| ⑨ -1 | ⑩ -2 | ⑪ $-\frac{1}{2}$ | ⑫ $-\frac{1}{3}$ | ⑬ $-\frac{2}{3}$ |
| ⑭ e | ⑮ e^2 | ⑯ \sqrt{e} | ⑰ $\frac{1}{e}$ | ⑱ $\frac{1}{e^2}$ |

計算用紙

問2 関数 $f(x) = \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} x$ を考える.

(1) $f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x) = \boxed{3}$$

となるので, $f'(x) = 0$ の解は $x = \boxed{4}$ である.

3 の解答群

- | | |
|---|---|
| ① $\frac{x}{1+x^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ | ② $\frac{x}{1+x^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ |
| ③ $\frac{1}{1+x^2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ | ④ $\frac{1}{1+x^2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ |
| ⑤ $\frac{1}{1+x^2} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ | ⑥ $\frac{1}{1+x^2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ |
| ⑦ $\frac{1}{4x} + \frac{1}{\sqrt{3}(1+x^2)}$ | ⑧ $\frac{1}{4x} - \frac{1}{\sqrt{3}(1+x^2)}$ |
| ⑨ $\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$ | ⑩ $\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$ |
| Ⓐ $\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$ | Ⓑ $\frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$ |

4 の解答群

- | | | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ -1 | ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ $-\frac{1}{2}$ |
| ⑥ $\frac{1}{3}$ | ⑦ $-\frac{1}{3}$ | ⑧ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ⑨ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ⑩ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| Ⓐ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | Ⓑ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | Ⓒ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | Ⓓ $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | Ⓔ $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ |

(2) $x = \boxed{4}$ において, $f(x)$ は $\boxed{5}$.

5 の解答群

- ① 最大値をとる ② 最小値をとる ③ 最小値も最大値もとらない

計算用紙

問3 定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1}$$

の値を求める. $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \boxed{6}$$

であり, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $t = \boxed{7}$ なので

$$I = \int_0^{\boxed{7}} \frac{dt}{\boxed{8}} = \boxed{9}.$$

6 ・ **8** の解答群

- | | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|------------------------|
| ① $1+t$ | ② $1+2t$ | ③ $2(1+t)$ | ④ $1+t^2$ |
| ⑤ $2(1+t^2)$ | ⑥ $(1+t)^2$ | ⑦ $2+t+t^2$ | ⑧ $\frac{2+t+2t^2}{2}$ |
| ⑨ $\frac{1}{1+t^2}$ | ⑩ $\frac{2}{1+t^2}$ | ⑪ $\frac{1}{2(1+t)}$ | ⑫ $\frac{1}{2(1+t^2)}$ |

7 の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------------|------------------------|--------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ $\sqrt{2}$ | ⑤ $\sqrt{3}$ |
| ⑥ $\frac{1}{2}$ | ⑦ $\frac{1}{3}$ | ⑧ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ⑨ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ⑩ ∞ |

9 の解答群

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ $\frac{1}{3}$ |
| ⑥ $\frac{2}{9}$ | ⑦ $\frac{8}{9}$ | ⑧ $\frac{16}{9}$ | ⑨ $\log 2$ | ⑩ $\log 3$ |
| ⑪ $2\log 2$ | ⑫ $2\log 3$ | ⑬ $\frac{1}{2}\log 2$ | ⑭ $\frac{1}{2}\log 3$ | ⑮ ∞ |

計算用紙

問 4 $t > 0$ において、関数 $f(t)$ は微分可能であるとし、正数 x, y に対して $u(x, y) = \frac{f(xy)}{x+y}$ とおく。このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{10}$$

および

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{11}$$

が成り立つ。特に $f(t) = \sqrt{t}$ のとき

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \boxed{12}$$

が成り立つ。

10 ・ **11** の解答群

- | | |
|---|---|
| ① $\frac{f(xy) - xyf'(xy)}{x+y}$ | ① $\frac{xyf'(xy) - f(xy)}{x+y}$ |
| ② $\frac{f(xy) - 2xyf'(xy)}{x+y}$ | ③ $\frac{2xyf'(xy) - f(xy)}{x+y}$ |
| ④ $\frac{f(xy)(1 - 2xyf'(xy))}{x+y}$ | ⑤ $\frac{f(xy)(2xyf'(xy) - 1)}{x+y}$ |
| ⑥ $\frac{f(xy)}{(x+y)^2} - \frac{f'(xy)}{x+y}$ | ⑦ $\frac{f'(xy)}{x+y} - \frac{f(xy)}{(x+y)^2}$ |
| ⑧ $\frac{f(xy)}{(x+y)^2} - \frac{xf'(xy)}{x+y}$ | ⑨ $\frac{xf'(xy)}{x+y} - \frac{f(xy)}{(x+y)^2}$ |
| ⑨ $\frac{f(xy)}{(x+y)^2} - \frac{yf'(xy)}{x+y}$ | ⑩ $\frac{yf'(xy)}{x+y} - \frac{f(xy)}{(x+y)^2}$ |

12 の解答群

- | | | | |
|-----------------|----------------|---------------|------------------|
| ① 0 | | | |
| ① 1 | ② 2 | ③ u | ④ $2u$ |
| ⑤ $\frac{u}{2}$ | ⑥ $-u$ | ⑦ $-2u$ | ⑧ $-\frac{u}{2}$ |
| ⑨ $(1 - xy)u$ | ⑩ $(1 - 2xy)u$ | ⑪ $(xy - 1)u$ | ⑫ $(2xy - 1)u$ |

計算用紙

問 5 xy 平面上の集合 D が

$$D = \{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \}$$

で与えられているとき、重積分

$$I = \iint_D \frac{y+1}{x+y+1} dx dy$$

の値を求める。

(1) I は

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\boxed{13}} \frac{y+1}{x+y+1} dx \right) dy$$

と表される。

(2) $I_1(y) = \int_0^{\boxed{13}} \frac{1}{x+y+1} dx$ とおく。変数変換 $z = x + y + 1$ を行うと

$$I_1(y) = \int_{y+1}^{\boxed{14}} \frac{1}{z} dz = \left[\log z \right]_{y+1}^{\boxed{14}} = \log \boxed{14} - \log(y+1)$$

となる。

13 ・ **14** の解答群

- | | | |
|---------|-----------|-----------|
| ① 0 | ④ 1 | ⑦ 2 |
| ② x | ⑤ $x+1$ | ⑧ $1-x$ |
| ③ y | ⑥ $y+1$ | ⑨ $1-y$ |
| ④ $x+y$ | ⑩ $x+y+1$ | ⑪ $1-x-y$ |

(3) 部分積分法を用いると

$$\int_0^1 (y+1) \log(y+1) dy = \boxed{15}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (y+1) I_1(y) dy \\ &= \int_0^1 (y+1) [\log \boxed{14} - \log(y+1)] dy = \boxed{16} \end{aligned}$$

を得る.

15 ・ **16** の解答群

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| ① 0 | ① $\frac{1}{4}$ | ② $\frac{14}{3}$ |
| ③ $2 \log 2 + 1$ | ④ $2 \log 2 - 1$ | ⑤ $2 \log 2 - \frac{3}{4}$ |
| ⑥ $3 \log 2 + 4$ | ⑦ $3 \log 2 - \frac{2}{3}$ | ⑧ $\frac{3 \log 2}{2} + \frac{1}{4}$ |
| ⑨ $\frac{7 \log 2}{2} - \frac{3}{4}$ | ⑩ $\frac{2 \log 2}{3} - \frac{16}{9}$ | ⑪ $-\log 2 + 3$ |
| ⑫ $-5 \log 2 + \frac{19}{3}$ | ⑬ $-\frac{\log 2}{2} + \frac{3}{4}$ | ⑭ $-\frac{\log 2}{3} + \frac{1}{9}$ |

第2分野 線形代数

[問 1 ~ 問 5 : 解答番号 17 ~ 35]

問 1 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.

- (1) A の行列式 $|A|$ の値は 17 であるので, A は逆行列 A^{-1} をもつ.
- (2) 逆行列 A^{-1} の (2,3) 成分は 18 であり, A^{-1} の行列式の値は 19 である.

17 ~ 19 の解答群

① 0

② 1

③ -1

④ 3

⑤ -3

⑥ 5

⑦ -5

⑧ $\frac{1}{3}$

⑨ $-\frac{1}{3}$

⑩ $\frac{1}{5}$

Ⓐ $-\frac{1}{5}$

Ⓑ $\frac{1}{7}$

Ⓒ $-\frac{1}{7}$

計算用紙

問 2 座標空間内に 3 点 $A(2, a, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(3, -1, 2)$ がある. ただし, a は定数とする.

(1) $a = \boxed{20}$ のとき, ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \boxed{21} \end{pmatrix}$ は \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} のどちらにも直交する.

(2) $a = \boxed{20}$ のとき, 3 点 A, B, C を含む平面上の任意の点 $P(x, y, z)$ は $\boxed{22}$ を満たす.

$\boxed{20}$ ・ $\boxed{21}$ の解答群

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

⑥ 5

⑦ 6

⑧ -1

⑨ -2

⑩ -3

⑪ a -4

⑫ b -5

⑬ c -6

$\boxed{22}$ の解答群

① $x + 2y = 0$

① $2x + y = 1$

② $x + 2y - z = 0$

③ $2x + y - 2z = 3$

④ $x + 2y - z = 2$

⑤ $2x + y - 2z = -1$

⑥ $x + 2y - 3z = 4$

⑦ $2x + y - 4z = 0$

⑧ $x + 2y - 3z = -2$

⑨ $2x + y - 4z = -3$

計算用紙

問 3 3次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^3 における 3つのベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

について考える. ただし, s は定数とする.

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が 1次従属になるのは $s = \boxed{23}$ のときである.

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を並べてできる正方行列を $A = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)$ と表し, 集合 V を

$$V = \{ A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \}$$

とおく. $s = \boxed{23}$ のとき, V は $\boxed{24}$ 次元ベクトル空間であり, $s \neq \boxed{23}$ のとき, V は $\boxed{25}$ 次元ベクトル空間である.

$\boxed{23} \sim \boxed{25}$ の解答群

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

⑥ 5

⑦ -1

⑧ -2

⑨ -3

⑩ -4

⑪ -5

計算用紙

問 4 4 元連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

を考える。方程式 (*) の拡大係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、行列 A の階数 (ランク) は 26 であり、方程式 (*) の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ \text{27} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ \text{28} \\ \text{29} \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

と表すことができる。

26 ~ 29 の解答群

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

⑥ 5

⑦ 6

⑧ -1

⑨ -2

⑩ -3

Ⓐ -4

Ⓑ -5

Ⓒ -6

計算用紙

問5 2次方程式

$$(*) \quad x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = 8$$

について考える.

- (1) 方程式(*)は, 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & \boxed{30} \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8$$

と表すことができる.

- (2) (1) で定めた行列 A の固有値は $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \boxed{31}$ である.

$$\lambda_1 \text{ に対応する固有ベクトルとして } \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \boxed{32} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 \text{ に対応する固有ベクトルとして } \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{33} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

がとれる.

- (3) ベクトル \mathbf{x} に対して, $|\mathbf{x}|$ はその長さ (大きさ) を表すものとする. (2) で求めたベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を用いて, 正方行列 $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \\ |\mathbf{p}_1| & |\mathbf{p}_2| \end{pmatrix}$ を定める. すると P は $\boxed{34}$ であり, 変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

により, 方程式(*)は $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 8$ となる. この方程式が表す図形は $\boxed{35}$ である.

$\boxed{30} \sim \boxed{33}$ の解答群

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

⑥ 5

⑦ 6

⑧ 7

⑨ 8

⑩ -1

⑪ a -2

⑫ b -3

⑬ c -4

⑭ d -5

⑮ e -6

⑯ f -7

⑰ g -8

34 の解答群

- ① 単位行列 ② 対角行列 ③ 対称行列
④ 交代行列 ⑤ 直交行列 ⑥ 上三角行列

35 の解答群

- ① 直線 ② 楕円 ③ 放物線 ④ 双曲線

第3分野 常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 5 : 解答番号 36 ～ 52 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を表す. すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える. また, 特殊解は特解ともいう.

問 1 微分方程式

$$(*) \quad 2x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

について考える.

(1) $y = x \cdot u(x)$ を $(*)$ に代入すると, $u(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \quad u' = \boxed{36}$$

が導かれる.

36 の解答群

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| ① $\frac{2-u}{2u}$ | ② $-\frac{2-u}{2u}$ | ③ $\frac{2+u^2}{xu}$ | ④ $-\frac{2+u^2}{xu}$ |
| ⑤ $\frac{2+u^2}{2xu}$ | ⑥ $-\frac{2+u^2}{2xu}$ | ⑦ $\frac{2-u^2}{2xu}$ | ⑧ $-\frac{2-u^2}{2xu}$ |

(2) $(**)$ の一般解は

$$(***) \quad \boxed{37} = C \quad (C \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

と表される.

37 の解答群

- | | | | |
|------------|----------------|-----------------------|-------------------------|
| ① $2u + x$ | ② $x(2 + u^2)$ | ③ $\frac{2 + u^2}{x}$ | ④ $\frac{2 + u^2}{e^x}$ |
| ⑤ $2u - x$ | ⑥ $x(2 - u^2)$ | ⑦ $\frac{2 - u^2}{x}$ | ⑧ $\frac{2 - u^2}{e^x}$ |

- (3) (***) に $u = \frac{y}{x}$ を代入すれば, (*) の一般解が導かれる. これは, xy 平面上の **38** を表す. 特に, **38** が点 $(-1, 1)$ を通るとき $C =$ **39** である.

38 の解答群

- ① 直線 ② 円 ③ 楕円 ④ 双曲線
⑤ 放物線 ⑥ サイクロイド ⑦ 懸垂線

39 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5
⑦ -1 ⑧ -2 ⑨ -3 ⑩ -4 ⑪ -5

問 2 微分方程式

$$(*) \quad y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}$$

について考える.

(1) 対応する同次方程式

$$y' + y \tan x = 0$$

の一般解は, C を任意定数とすると

$$(**) \quad y = C \boxed{40}$$

と表される.

(2) $(**)$ において, C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて, $y = u(x) \cdot \boxed{40}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{41}$$

が得られる. この方程式の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{42}$$

であるので, $(*)$ の一般解は $y = \boxed{42} \cdot \boxed{40}$ である.

$\boxed{40} \cdot \boxed{41}$ の解答群

- | | | | |
|-----------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| ⑦ x | ① $\sin x$ | ② $\cos x$ | ③ $\tan x$ |
| | ④ $\sin^2 x$ | ⑤ $\cos^2 x$ | ⑥ $\tan^2 x$ |
| ⑦ $\frac{1}{x}$ | ⑧ $\frac{1}{\sin x}$ | ⑨ $\frac{1}{\cos x}$ | ⑩ $\frac{1}{\tan x}$ |
| | ⑪ $\frac{1}{\sin^2 x}$ | ⑫ $\frac{1}{\cos^2 x}$ | ⑬ $\frac{1}{\tan^2 x}$ |

42 の解答群

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| ① $\sin x + \tilde{C}$ | ④ $\cos x + \tilde{C}$ | ⑦ $\tan x + \tilde{C}$ |
| ② $-\sin x + \tilde{C}$ | ⑤ $-\cos x + \tilde{C}$ | ⑧ $-\tan x + \tilde{C}$ |
| ③ $\frac{1}{\sin x} + \tilde{C}$ | ⑥ $\frac{1}{\cos x} + \tilde{C}$ | ⑨ $\frac{1}{\tan x} + \tilde{C}$ |
| ④ $-\frac{1}{\sin x} + \tilde{C}$ | ⑩ $-\frac{1}{\cos x} + \tilde{C}$ | ⑪ $-\frac{1}{\tan x} + \tilde{C}$ |

(\tilde{C} は任意定数)

(3) 初期条件 $y(0) = 2$ を満たす方程式 (*) の解は $y =$ **43** である.

43 の解答群

- | | | |
|----------------------|------------------------|------------------------|
| ① $\sin x$ | ④ $\cos x$ | ⑦ $\tan x$ |
| ② $\cos x + \sin x$ | ⑤ $2 \cos x + \sin x$ | ⑧ $\cos x + 2 \sin x$ |
| ③ $\cos x - \sin x$ | ⑥ $2 \cos x - \sin x$ | ⑨ $\cos x - 2 \sin x$ |
| ④ $-\cos x + \sin x$ | ⑩ $-2 \cos x + \sin x$ | ⑪ $-\cos x + 2 \sin x$ |

問3 微分方程式

$$(*) \quad y'' - (y')^2 = 1$$

について考える.

(1) $z = y'$ とおくと, $(*)$ は z に関する微分方程式

$$\frac{dz}{dx} - z^2 = 1$$

となる. これを解いて

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx$$

より

$$\boxed{44} = x + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

を得る.

44 の解答群

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------|
| ① $\frac{2z}{(z^2 + 1)^2}$ | ① $\frac{-2z}{(z^2 + 1)^2}$ | ② $\log(z^2 + 1)$ |
| ③ $\sin z$ | ④ $\cos z$ | ⑤ $\tan z$ |
| ⑥ $\frac{1}{\sin z}$ | ⑦ $\frac{1}{\cos z}$ | ⑧ $\frac{1}{\tan z}$ |
| ⑨ $\sin^{-1} z$ | ⑩ $\cos^{-1} z$ | ⑪ $\tan^{-1} z$ |

(2) さらに

$$y' = z = \boxed{45}$$

であることから $(*)$ の一般解は

$$y = \int \boxed{45} dx = \boxed{46} + C_2 \quad (C_2 \text{ は任意定数})$$

である.

45 ・ 46 の解答群

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|------------------------|
| ⑩ $\sin(x + C_1)$ | ⑪ $\cos(x + C_1)$ | ⑫ $\tan(x + C_1)$ |
| ⑬ $-\sin(x + C_1)$ | ⑭ $-\cos(x + C_1)$ | ⑮ $-\tan(x + C_1)$ |
| ⑯ $\sin^{-1}(x + C_1)$ | ⑰ $\cos^{-1}(x + C_1)$ | ⑱ $\tan^{-1}(x + C_1)$ |
| ⑲ $\log \cos(x + C_1) $ | ㉑ $-\log \cos(x + C_1) $ | |

問 4 微分方程式

$$(*) \quad 2y'' + y' - y = 3e^{-x}$$

について考える.

(1) 対応する同次方程式

$$2y'' + y' - y = 0$$

の一般解を y_h とすれば, $y_h = \boxed{47}$ である.

47 の解答群

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| ① $C_1e^x + C_2e^{-x}$ | ④ $C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2e^{-x}$ | ⑦ $C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{-x}$ |
| ② $C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2e^x$ | ⑤ $C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^x$ | ⑧ $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ |
| ③ $C_1e^x + C_2e^{-2x}$ | ⑥ $C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ | ⑨ $C_1e^x + C_2e^{2x}$ |

(C_1, C_2 は任意定数)

(2) 一方, $y_p = \boxed{48} \cdot e^{-x}$ は (*) の特殊解の 1 つであるので, (*) の一般解は $y = y_h + y_p = \boxed{47} + \boxed{48} \cdot e^{-x}$ である.

48 の解答群

- | | | | | | |
|------|-------|---------|----------|----------|-----------|
| ① 1 | ④ -1 | ⑦ 3 | ⑩ -3 | ⑬ x | ⑭ -x |
| ② 3x | ⑤ -3x | ⑧ x^2 | ⑪ $-x^2$ | ⑮ $3x^2$ | ⑯ $-3x^2$ |

(3) 初期条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ を満たす方程式 (*) の解 $y(x)$ は $x \rightarrow \infty$ のとき **49** .

49 の解答群

- | | |
|-------------------|-------------------|
| ① 0 に収束する | ④ 1 に収束する |
| ② $+\infty$ に発散する | ⑤ $-\infty$ に発散する |
| ③ 振動する | |

計算用紙

問5 k を正の定数とする. 微分方程式

$$(*) \quad y'' + k^2 y = 0$$

について考える.

(1) 微分方程式 (*) の一般解

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

は $(f_1(x), f_2(x)) = (\boxed{50})$ で与えられる. このとき $f_1(x), f_2(x)$ のロンスキー行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \boxed{51}$$

である.

50 の解答群

- | | | |
|----------------------|------------------------------------|--------------------------|
| ① $1, x$ | ① x, x^2 | |
| ② e^{kx}, e^{-kx} | ③ $e^{\sqrt{k}x}, e^{-\sqrt{k}x}$ | ④ e^{k^2x}, e^{-k^2x} |
| ⑤ $\cos kx, \sin kx$ | ⑥ $\cos \sqrt{k}x, \sin \sqrt{k}x$ | ⑦ $\cos k^2x, \sin k^2x$ |

51 の解答群

- | | | | | | |
|-------|--------------|---------|----------------|----------------|-------------|
| ① 0 | ① x | ② x^2 | ③ $k \cos^2 x$ | ④ $k \sin^2 x$ | ⑤ ke^{kx} |
| ⑥ k | ⑦ \sqrt{k} | ⑧ k^2 | ⑨ $-2k$ | ⑩ $-2\sqrt{k}$ | ⑪ $-2k^2$ |

(2) ℓ を正の定数とする. 微分方程式 (*) が, $y(0) = 0, y(\ell) = 0$ を満たし, 定数関数ではない解をもつための必要十分条件は, $k\ell = \boxed{52}$ である.

52 の解答群

- | | | | |
|-------------------|--------------------|----------|-----------|
| ① 0 | ① 1 | ② 2 | ③ 3 |
| ④ $\frac{e}{n}$ | ⑤ e | ⑥ ne | ⑦ n^2e |
| ⑧ $\frac{\pi}{n}$ | ⑨ $\frac{n\pi}{2}$ | ⑩ $n\pi$ | ⑪ $2n\pi$ |

(n は自然数)

計算用紙

第4分野 確率・統計

〔 問 1 ～ 問 4 : 解答番号 53 ～ 72 〕

(注意) 事象 A に対し, $P(A)$ は A の起こる確率を表す. また, 確率変数 X に対し, $E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均, 平均値), 分散を表す.

問 1 (1) 確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ

X の値	1	2	3
確率	$\frac{1}{10}$	a	b

Y の値	4	5	6
確率	$\frac{2}{5}$	a	c

$(a, b, c$ は定数)

で与えられていて, $E(Y) = 5$ が成り立つとする. このとき $c =$ 53 であり,

$$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \text{54}, \quad V(Y) = \text{55}$$

である.

53 の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{10}$ | ③ $\frac{1}{5}$ | ④ $\frac{3}{10}$ | ⑤ $\frac{2}{5}$ | ⑥ $\frac{1}{2}$ |
| ⑦ $\frac{3}{5}$ | ⑧ $\frac{7}{10}$ | ⑨ $\frac{9}{10}$ | ⑩ 1 | | |

54 ・ **55** の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|--------------------|------------------|------------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{5}$ | ③ $\frac{2}{5}$ | ④ $\frac{3}{5}$ | ⑤ $\frac{4}{5}$ | ⑥ 1 |
| ⑦ 2 | ⑧ $\frac{11}{5}$ | ⑨ $\frac{13}{5}$ | ⑩ 3 | Ⓐ $\frac{17}{5}$ | Ⓑ $\frac{19}{5}$ |
| Ⓒ $\frac{7}{2}$ | Ⓓ $\frac{39}{10}$ | Ⓔ $\frac{14}{25}$ | Ⓕ $\frac{41}{100}$ | | |

(2) 確率変数 X がパラメータ λ をもつポアソン分布に従っている, すなわち

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

とする. また, $E(X) = 3$ であるとする. このとき $\lambda =$ 56 であり,

$$P(X \geq 1) =$$
 57

となる.

56 の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ 3 | ⑤ 4 | ⑥ 5 |
| ⑦ $\frac{1}{2}$ | ⑧ $\frac{1}{3}$ | ⑨ $\frac{1}{4}$ | ⑩ $\frac{1}{5}$ | ⑪ $\frac{1}{6}$ | |

57 の解答群

- | | | | | | |
|--|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① 0 | | | | | |
| ② 1 | ③ $\frac{1}{2}$ | ④ $\frac{1}{3}$ | ⑤ $\frac{2}{3}$ | ⑥ $\frac{1}{4}$ | ⑦ $\frac{3}{4}$ |
| ⑧ e | ⑨ e^2 | ⑩ e^3 | ⑪ e^{-1} | ⑫ e^{-2} | ⑬ e^{-3} |
| ⑭ $1 - e^{-1}$ ⑮ $1 - e^{-2}$ ⑯ $1 - e^{-3}$ | | | | | |

問 2 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が, 正の定数 a を用いて

$$f(x) = \begin{cases} a |\sin x \cos x|, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

で与えられている. このとき $a = \boxed{58}$ であり, $P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{59}$ である. また X の分布関数を $F(x) = P(X \leq x)$ とすると, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ においては $F(x) = \boxed{60} \cdot \cos^2 x$ である.

58 ~ **60** の解答群

- | | | | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|--------------------|-----------------|------------------------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ $\frac{1}{4}$ | |
| ⑥ $\frac{3}{4}$ | ⑦ $\frac{1}{8}$ | ⑧ $\frac{3}{8}$ | ⑨ $\frac{5}{8}$ | ⑩ $\frac{7}{8}$ | |
| ⑪ π | ⑫ $\frac{\pi}{2}$ | ⑬ $\frac{\pi}{4}$ | ⑭ $\frac{3\pi}{4}$ | ⑮ $-\sin x$ | ⑯ $\frac{\sin^2 x}{2}$ |

計算用紙

問3 (1) 2つの事象 A, B に対し, 事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す.

$$P(A) = \frac{1}{2}P(B), \quad P(A|B) = \frac{1}{6}$$

のとき, $P(B|A) = \boxed{61}$ である. さらに事象 A, B が独立であるとき, $P(A) = \boxed{62}$, $P(A \cup B) = \boxed{63}$ である.

$\boxed{61} \sim \boxed{63}$ の解答群

- ① 0 ② 1
 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$ ⑥ $\frac{5}{6}$ ⑦ $\frac{4}{9}$ ⑧ $\frac{5}{9}$ ⑨ $\frac{1}{12}$ ⑩ $\frac{1}{18}$

(2) m, σ, p を定数とし $\sigma > 0, 0 < p < 1$ とする. 確率変数 X は $E(X) = m, V(X) = \sigma^2$ を満たし, 確率変数 Y のとりうる値は 0 と 1 のみで $P(Y = 1) = p$ であるとする. X と Y が独立のとき, 積 XY の期待値と分散を求める. まず X と Y は独立なので $E(XY) = \boxed{64}$ である. また Y のとりうる値が 0 と 1 なので $Y^2 = \boxed{65}$ である. したがって

$$E((XY)^2) = E(X^2)E(Y^2) = \boxed{66}$$

が成り立つので $V(XY) = \boxed{67}$ である.

$\boxed{64}$ の解答群

- ① 0 ② 1 ③ p ④ $1 - p$ ⑤ $m + p$ ⑥ $m - p$
 ⑦ mp ⑧ $m(1 - p)$ ⑨ $mp(1 - p)$

$\boxed{65}$ の解答群

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ Y ⑤ $-Y$ ⑥ $2Y$ ⑦ pY

66 ・ 67 の解答群

- ① 0 ② 1 ③ $p\sigma + m$ ④ $\sigma^2 + m^2$
⑤ $p(\sigma^2 + m^2)$ ⑥ $p\sigma^2 + p(1-p)m^2$ ⑦ $mp(1-p)$ ⑧ $p^2\sigma^2$

問 4 ある温度計の測定誤差 (測定値から真値を引いた値) は, 製造時の記録によると, 0°C から 20°C の範囲では, 平均 0°C , 標準偏差 0.3°C の正規分布に従うものであった. ところが数年経ったいま, 正確に 10°C と分かっている液体を測定する操作を, 測定値が独立になる条件で 9 回実施したところ, 測定誤差の標本平均は 0.2°C であった. この温度計の機構上, 現在でも測定誤差は標準偏差 0.3°C の正規分布に従っていると考えられるが, 測定誤差の平均は経年変化により上昇した可能性がある. そこで, 現在の測定誤差の平均を $\mu^{\circ}\text{C}$, 標準偏差を 0.3°C として, μ に対する

帰無仮説 $H_0: \mu = 0$

対立仮説 $H_1: \mu > 0$

の片側検定を有意水準 5% で行うことにした.

n 回目の測定誤差を確率変数 X_n で表すと, 標本平均

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{9}$$

は平均 , 標準偏差 の正規分布に従う. よって帰無仮説 H_0 のもとでは,

$$Z = \frac{\bar{X} - \text{70}}{\text{69}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 正規分布表によれば

$$P(Z \geq 1.645) \doteq 0.05$$

である. 一方, 標本平均 \bar{X} の実現値は $\bar{x} = 0.2$ なので, Z の実現値は $z = \text{71}$ であり, H_0 は有意水準 5% で .

の解答群

- ① $\frac{\mu}{81}$ ② $\frac{\mu}{9}$ ③ $\frac{\mu}{3}$ ④ μ ⑤ 3μ ⑥ 9μ ⑦ 81μ

~ の解答群

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 9 ⑤ 10
 ⑥ 0.1 ⑦ 0.2 ⑧ 0.3 ⑨ 0.9 ⑩ 2.7 ⑪ a 8.1 ⑫ b 10.2
 ⑬ c $\frac{1}{270}$ ⑭ d $\frac{1}{90}$ ⑮ e $\frac{1}{30}$

72 の解答群

① 棄却される

② 採択される