本日やること

1. Fourier 変換
   - Fourier 反転公式
   - 偏微分方程式への応用

増訂しました。 2024.1.23

Fourier 変換

Fourier 積分

Fourier 変換・共役 Fourier 変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \cdots (2)$$

を $f(x)$ の **Fourier 変換**といい $\hat{f}(\xi),\ \mathcal{F}f, \cdots$ などで表す。また

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \cdots (3)$$

を $g(\xi)$ の **共役 Fourier 変換**といい $\check{\mathcal{F}}g, \check{g}, \cdots$ などで表す。

Fourier 変換

Fourier 積分

Fourier 反転公式

$$f \sim \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy\right)e^{i\xi x}d\xi \cdots (1)$$

が期待される。これを Fourier 反転公式という。

Fourier 級数

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy\right)e^{inx}$$

と比較せよ。

Fourier 変換

Fourier 積分

(2), (3) が存在するためには f, g は各有限区間で積分可能な上

絶対可積分：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$

でなくてはならないが、今回は深入りしない。とりあえず「f, f' ともに区分的に連続かつ絶対可積分である」ならば十分定義できるので以後これを仮定する。

どういう関数に対して (1) が成り立つかを調べたい。

Fourier 変換

Fourier 積分

$e^{-\frac{ax^2}{2}}$ の共役 Fourier 変換

$a > 0$ として

$$\check{\mathcal{F}}\left(e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \cdots (\star 2)$$

($\mathcal{F}$ でも同様にできる。)

Fourier 変換

Fourier 積分

Fourier 反転公式 (I)

f は f と $\hat{f}$ がともに有界連続かつ絶対可積分となるような関数とする。このとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \quad (= \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x))$$

[考え方] $\varepsilon > 0$ とする。

$$0 \leqq e^{\left(-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)} \leqq 1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\left(-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)} = 1$$

だから

$$\text{右辺} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{\left(-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y)\, dy \right) d\xi$$

Fourier 変換

Fourier 積分

$$\textbf{右辺} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(ix\xi - \frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y)\,dy\right)d\xi$$

積分順序交換

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(i(x-y)\xi - \frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)}\,d\xi\right) f(y)\,dy$$

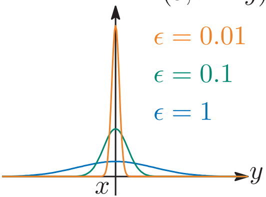
ξ と $x-y$ の役割を入れ替えて $(\star 2)$ を使う

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}}\right) f(y)\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}} f(y)\,dy$$

Fourier 変換

Fourier 積分



ここで

$$K(\varepsilon, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$$

とおくとこれは $K(1, x)$ のグラフを縦に $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 倍, 横に $\sqrt{\varepsilon}$ 倍したものだから

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\varepsilon, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} K(1, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$$

となる。したがって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K(\varepsilon, x-y) f(y)\, dy$ は $f(y)$ を点 x の近くで重み付き平均を取ったものと考えられるが, $\varepsilon \to 0$ とすると平均をとる範囲が図のように x に集中するから

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}} f(y)\, dy = f(x)$$

Fourier 変換

Fourier 積分

Fourier 反転公式は f が「十分なめらかで絶対可積分」ならば成り立つが，f が不連続なときはこのままでは成り立たない。次のことが知られている。

Fourier の反転公式 (II)

f，f' が絶対可積分かつ区分的連続ならば

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$$
$$\left(=\tilde{f}(x)\ \text{とおく}\right)\quad\cdots(\star 3)$$

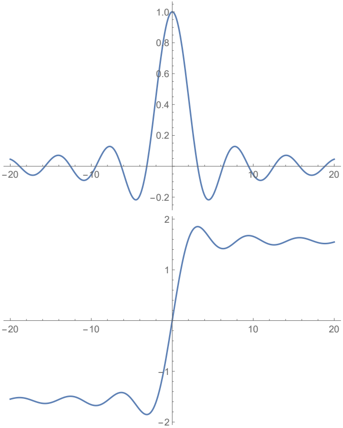
[注意] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(=\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b\right)$ とすることはできない。

以下でこのことが成り立つことを説明する。

Fourier 変換

Fourier 積分

正弦積分関数



$$y = \frac{\sin x}{x}$$

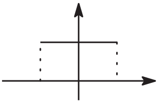
$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$ ： 正弦積分関数

$$\lim_{x \to \pm\infty} Si(x) = \pm\frac{\pi}{2}$$ が知られている。

Fourier 変換

Fourier 積分

[例 1]

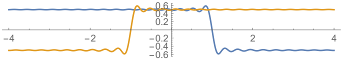


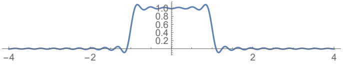
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{のとき}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}\right)}{i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sin \xi a}{\xi} \end{aligned}$$

Fourier 変換

Fourier 積分





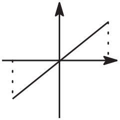
$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} \frac{2\sin \xi a}{\xi} (\cos x\xi + i \sin x\xi)\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} \Bigg(\underbrace{\frac{2\sin \xi a \cos x\xi}{\xi}}_{\text{偶関数}} + i \underbrace{\frac{2\sin \xi a \sin x\xi}{\xi}}_{\text{奇関数}} \Bigg)\, d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{l} \frac{(\sin(x+a)\xi - \sin(x-a)\xi)}{\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{l(x+a)} \frac{\sin t}{t}\, dt - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{l(x-a)} \frac{\sin t}{t}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left(Si(l(x+a)) - Si(l(x-a)) \right) \\
&\to \tilde{f}(x) \quad (l \to \infty)
\end{aligned}
$$

だから $(\star 3)$ が成り立つ。

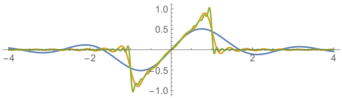
Fourier 変換

Fourier 積分

[例 2] 同様の計算で



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & -a < x < a \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{のとき}$$



$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\left(e^{i\xi a} + e^{-i\xi a}\right)}{i\xi} + \frac{\left(e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}\right)}{a\xi^2} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$
$$= -\frac{2\sin(al)\sin(xl)}{al\pi} + \frac{x}{a}\frac{1}{\pi}\left(-Si(l(x-a)) + Si(l(x+a))\right)$$

だから $(\star 3)$ が成り立つ。

Fourier 変換

Fourier 積分

[性質 1.] f, g が $(\star 3)$ をみたす $\Rightarrow$ $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ も $(\star 3)$ をみたす

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} (\widehat{c_1 f + c_2 g})(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \left(c_1 \hat{f} + c_2 \hat{g}\right)(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(c_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi + c_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \right) \\
&= c_1 \tilde{f}(x) + c_2 \tilde{g}(x) = (\widetilde{c_1 f + c_2 g})(x)
\end{aligned}
$$

だから $c_1 f + c_2 g$ も $(\star 3)$ を満たす。

Fourier 変換

Fourier 積分

[性質 2.] $f(x)$ が $(\star 3)$ をみたす $\Rightarrow$ $f_h(x) = f(x-h)$ も $(\star 3)$ をみたす

[確かめ]

$$\begin{aligned}
\widehat{(f_h)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h) e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h) e^{-i(x-h)\xi}\, dx \right) e^{-ih\xi} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi}\, dt \right) e^{-ih\xi} = \hat{f}(\xi) e^{-ih\xi}
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \widehat{(f_h)}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{f}(\xi) e^{-ih\xi} e^{ix\xi}\, d\xi \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{f}(\xi) e^{i(x-h)\xi}\, d\xi = \tilde{f}(x-h) = \left(\tilde{f}\right)_h (x) = \widetilde{(f_h)}(x)
\end{aligned}$$

だから f_h も $(\star 3)$ をみたす

Fourier 変換

Fourier 積分

[性質 3.] $\mathcal{F}(f') = {\color{red} i\xi}\mathcal{F}(f)$

[確かめ] 部分積分により

$$
\begin{aligned}
\textbf{左辺} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[f(x) e^{-ix\xi} \Big]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi) e^{-ix\xi}\, dx
\end{aligned}
$$

この場合は $x \to \pm\infty$ のとき $|f(x)| \to 0$ が知られており

$$
= i\xi \hat{f}(\xi)
$$

Fourier 変換

Fourier 積分

[性質 4. (合成積)]　関数 f, g の合成積 $f*g$ を

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

で定めるとき

$$\mathcal{F}(f*g)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

[確かめ]

$$\text{右辺}=\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy\xi}\,dy\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-i(x+y)\xi}\,dxdy$$

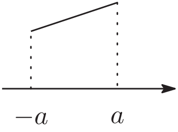
変数変換 $x+y=u$, $y=v$ により

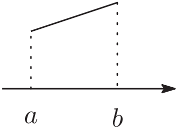
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u-v)g(v)e^{-iu\xi}\,dvdu$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\xi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u-v)g(v)\,dv\right)du=\text{左辺}$$

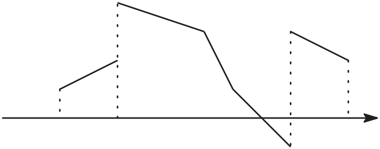
Fourier 変換

Fourier 積分

[例 3] 例 1, 2 に性質 1, 2 を適用して







のような関数でも $(\star 3)$ が成り立つので、近似により定理が証明される。

Fourier 変換

偏微分方程式への応用

熱方程式の解

熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

の解は

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)} f(y)\, dy$$

と表される。

Fourier 変換

偏微分方程式への応用

[確かめ] x に関する Fourier 変換を $\mathcal{F}(f)$ と書く。

両辺 Fourier 変換して

$$\mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}(u_{xx})$$

積分と微分の順序交換して

$$\text{左辺} = (\mathcal{F}(u))_t$$

性質 3 より

$$\text{右辺} = -\xi^2 \mathcal{F}(u)$$

Fourier 変換

偏微分方程式への応用

両辺比較して

$$(\mathcal{F}(u))_t = -\xi^2 \mathcal{F}(u), \quad \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f),$$

t の常微分方程式の初期値問題とみて

$$\mathcal{F}(u)(x,t) = \mathcal{F}(f) e^{-\xi^2 t}$$

両辺の共役 Fourier 変換をとって

$$(u)(x,t) = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f) e^{-\xi^2 t})$$

性質 4 より

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \check{\mathcal{F}}(e^{-\xi^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \frac{1}{\sqrt{2t}} (e^{-\frac{x^2}{4t}}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} (e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}) f(y)\, dy \end{aligned}$$