本日やること

1. Fourier 変換
    - Fourier 級数の復習
    - Fourier 積分
    - Fourier 反転公式
    - 偏微分方程式への応用

Fourier 級数の復習

復習：Fourier 級数の定義

Fourier 級数の定義

周期 2π の関数 $f(x)$ に対して

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

とおくとき

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

と表す．この右辺の級数を f の Fourier 級数という.

Fourier 級数の復習

Fourier 級数の定義

定理：Fourier 級数の収束

関数 f は $[-\pi, \pi]$ 上区分的に連続で，導関数 f' も区分的に連続であるとする．この時 f の Fourier 級数はすべての x で収束し，その和は $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ に等しい．

Fourier 級数の復習

Fourier 級数の定義

復習：複素型 Fourier 級数

周期 2π の（複素数値）関数 $f(x)$ に対して

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

とおくとき

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad : \quad f(x) \text{ の複素型 Fourier 級数}$$

右辺の収束と和については前定理と同様なことが成り立つ。

Fourier 積分

このことを $(-\infty, \infty)$ 上の関数についてやりたい。そのためまず $[-l, l]$ 上に拡張する。

$f(x)$ を $[-l, l]$ 上の関数とする。$t = \dfrac{\pi}{l}x$ とすると $t \mapsto f(\frac{l}{\pi}t)$ は $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の関数だから Fourier 級数展開すると

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) e^{-int}\, dt$$

$x = \frac{l}{\pi}t$ で変数変換すると

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-in\frac{\pi}{l}x} \frac{\pi}{l}\, dx$$

だから $[-l, l]$ 上の Fourier 級数展開

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{l}x}, \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-in\frac{\pi}{l}x}\, dx$$

ができる。

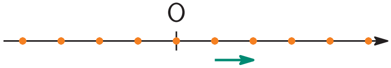
Fourier 積分

まとめると $[-l, l]$ 上の関数 $f(x)$ に対して

$$f(x) \sim \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(y) e^{-i\frac{n\pi y}{l}}\, dy \right) e^{i\frac{n\pi x}{l}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(y) e^{-i\frac{n\pi y}{l}}\, dy \right) e^{i\frac{n\pi x}{l}}\, \frac{\pi}{l}$$

$\dfrac{\pi}{l} = \Delta\xi$ とおいて



$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(y) e^{-in\Delta\xi y}\, dy \right) e^{in\Delta\xi x}\, \Delta\xi$$

$l \to +\infty$ とすると $\Delta\xi \to 0$ だから積分の定義により (形式的に!!)

$$\to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \right) e^{i\xi x}\, d\xi$$

Fourier 変換

Fourier 積分

まとめて $(-\infty, \infty)$ **上の関数** $f(x)$ **に対して**

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \right) e^{i\xi x} d\xi \cdots (1)$$

が期待される。これを Fourier 反転公式 という。Fourier 級数

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny}\, dy \right) e^{inx}$$

と比較せよ。

Fourier 変換

Fourier 積分

Fourier 変換・Fourier 逆変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy \cdots (2)$$

を $f(x)$ の Fourier 変換といい $\hat{f}(\xi),\ \mathcal{F}f,\cdots$ などで表す。また

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi \cdots (3)$$

を $g(\xi)$ の 共役 Fourier 変換といい $\check{\mathcal{F}}g, \check{g},\cdots$ などで表す。

(1) は

$$\check{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \sim f$$

を意味する。

Fourier 変換

Fourier 積分

(2), (3) が存在するためには f, g は各有限区間で積分可能な上

絶対可積分：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$

でなくてはならないが、今回は深入りしない。とりあえず「f, f' ともに区分的に連続かつ絶対可積分である」ならば十分定義できるので以後これを仮定する。

どういう関数に対して (1) が成り立つかを調べたい。

Fourier 変換

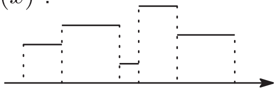
Fourier 積分

Riemann-Lebesgue の定理

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f|\,dx$ が収束するとき $\displaystyle\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

[考え方] $f(x)$ は

$f_\varepsilon(x)$:



のような関数で近似できる。

Fourier 変換

Fourier 積分

とくに　$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ のとき

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} i\xi}\left(e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}\right) \to 0, \quad (|\xi| \to 0)$$

だから

$$\hat{f}_\epsilon(\xi) \to 0, \quad (|\xi| \to \infty)$$

したがって

$$\hat{f}(\xi) \to 0, \quad (|\xi| \to \infty)$$

Fourier 変換

Fourier 積分

$e^{-\frac{ax^2}{2}}$ の共役 Fourier 変換

$a > 0$ として

$$\check{\mathcal{F}}\left(e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}} \cdots (\star 2)$$

($\mathcal{F}$ でも同様にできる。)

[考え方]

$$x^2 + 2x\left(-i\frac{\xi}{a}\right) + \left(-i\frac{\xi}{a}\right)^2 = \left(x - i\frac{\xi}{a}\right)^2$$

だから

$$-\frac{ax^2}{2} + ix\xi = -\frac{\xi^2}{2a} - \frac{a}{2}\left(x - i\frac{\xi}{a}\right)^2$$

Fourier 変換

Fourier 積分

これを使って

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(ix\xi - \frac{ax^2}{2}\right)}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right)} e^{\left(-\frac{a}{2}\left(x - i\frac{\xi}{a}\right)^2\right)}\, dx \\
&= e^{\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{a}{2}\left(x - i\frac{\xi}{a}\right)^2\right)}\, dx \ \cdots \ (\star)
\end{aligned}
$$

Fourier 変換

Fourier 積分

$e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}$ を複素変数 z の複素数値関数とみる。

$$\mathcal{C} : z = z(t), \quad a \leqq t \leqq b$$

を複素平面内の閉じた曲線とする。このとき 任意の $\mathcal{C}$ に対して

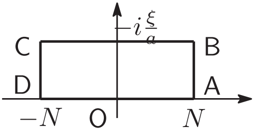
$$\int_a^b e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)} \frac{dz}{dt}\, dt = 0 \qquad \left(\text{これを } \int_{\mathcal{C}} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}\, dz \text{ と書く}\right)$$

であることが知られている。(Cauchy の積分公式：後でやります。)

Fourier 変換

Fourier 積分

とくに $\mathcal{C}$ を



として

$$0 = \int_{\mathcal{C}} e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}\,dz = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

$$= \int_0^{-\frac{\xi}{a}} e^{\left(-\frac{(N+iy)^2}{2}\right)}\,idy \quad \to 0 \ \ (N \to \infty)$$

$$+ \int_N^{-N} e^{\left(-\frac{a}{2}\left(x - i\frac{\xi}{a}\right)^2\right)}\,dx$$

$$+ \int_{-\frac{\xi}{a}}^{0} e^{\left(-\frac{(-N+iy)^2}{2}\right)}\,idy \quad \to 0 \ \ (N \to \infty)$$

$$+ \int_{-N}^{N} e^{\left(-\frac{ax^2}{2}\right)}\,dx$$

だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{a}{2}(x-\frac{\xi}{a})^2\right)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{ax^2}{2}\right)}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Fourier 変換

Fourier 積分

したがって

$$
\begin{aligned}
\textbf{左辺} &= e^{\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{a}{2}\left(x - i\frac{\xi}{a}\right)^2\right)} \, dx \quad \cdots \quad (\star) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right)} \\
&= \textbf{右辺}
\end{aligned}
$$

Fourier 変換

Fourier 積分

Fourier 反転公式 (I)

f は f と $\hat{f}$ がともに有界連続かつ絶対可積分となるような関数とする。このとき

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi \quad (= \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x))$$

[考え方] $\varepsilon > 0$ とする。

$$0 \leqq e^{\left(-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)} \leqq 1, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} e^{\left(-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)} = 1$$

だから

$$\text{右辺} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{\left(-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) \, dy \right) d\xi$$

Fourier 変換

Fourier 積分

$$\textbf{右辺} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(ix\xi - \frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y)\,dy\right)d\xi$$

積分順序交換

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(i(x-y)\xi - \frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right)}\,d\xi\right) f(y)\,dy$$

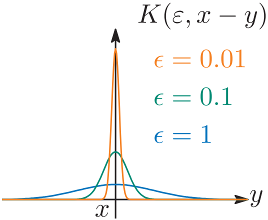
x **を** ξ, ξ **を** $x-y$ **に置きかえて** $(\star 2)$ **を使う**

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}}\right) f(y)\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}} f(y)\,dy$$

Fourier 変換

Fourier 積分



ここで

$$K(\varepsilon, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$$

とおくとこれは $K(1, x)$ のグラフを縦に $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 倍, 横に $\sqrt{\varepsilon}$ 倍したものだから

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\varepsilon, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} K(1, x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$$

となる。したがって $\int_{-\infty}^{\infty} K(\varepsilon, x-y) f(y)\, dy$ は $f(y)$ を点 x の近くで重み付き平均を取ったものと考えられるが, $\varepsilon \to 0$ とすると平均をとる範囲が図のように x に集中するから

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}} f(y)\, dy = f(x)$$

Fourier 変換

Fourier 積分

Fourier 反転公式は f が「十分なめらかで絶対可積分」ならば成り立つが，f が不連続なときはこのままでは成り立たない。次のことが知られている。

Fourier の反転公式 (II)

f, f' が絶対可積分かつ区分的連続ならば

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))\quad\cdots(\star 3)$$

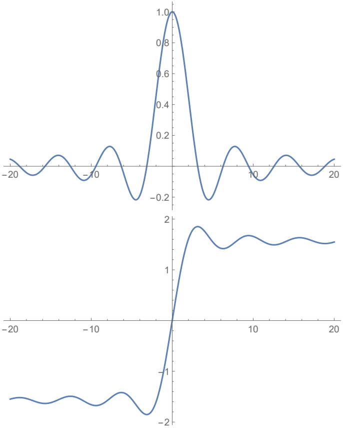
[注意] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(=\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}\right)$ とすることはできない。

以下でこのことが成り立つことを説明する。

Fourier 変換

Fourier 積分

正弦積分関数



$$y = \frac{\sin x}{x}$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \quad : \text{ 正弦積分関数}$$

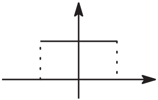
$$\lim_{x \to \pm\infty} Si(x) = \pm\frac{\pi}{2}$$ が知られている。

Fourier 変換

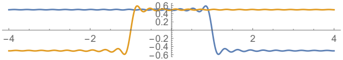
Fourier 積分

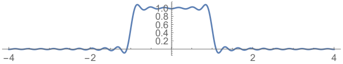
[例 1]

$$f(x)=\begin{cases}1 & -a<x<a \\ 0 & \text{その他}\end{cases} \quad \text{のとき}$$



$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(e^{i\xi a}-e^{-i\xi a}\right)}{i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\sin\xi a}{\xi}$$





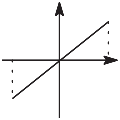
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l}^{l}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\left(-Si(l(x-a))+Si(l(x+a))\right)$$

だから $(\star 3)$ が成り立つ。

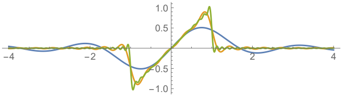
Fourier 変換

Fourier 積分

[例 2]



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & -a < x < a \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{のとき}$$



$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\left(e^{i\xi a} + e^{-i\xi a}\right)}{i\xi} + \frac{\left(e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}\right)}{a\xi^2} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^{l} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi$$

$$= -\frac{2\sin(al)\sin(xl)}{al\pi} + \frac{x}{a}\frac{1}{\pi}\left(-Si(l(x-a)) + Si(l(x+a))\right)$$

だから $(\star 3)$ が成り立つ。

Fourier 変換
Fourier 積分

性質 1. f, g **が** $(\star 3)$ **をみたす** $\Rightarrow$ $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ **も** $(\star 3)$ **をみたす**

性質 2. $f(x)$ **が** $(\star 3)$ **をみたす** $\Rightarrow$ $f_h(x) = f(x-h)$ **も** $(\star 3)$ **をみたす**

[確かめ]

性質 3. $\mathcal{F}(f') = i\xi \mathcal{F}(f)$

[確かめ]

Fourier 変換

Fourier 積分

性質 4. (合成積) 関数 f, g **の合成積** $f * g$ **を**

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

で定めるとき

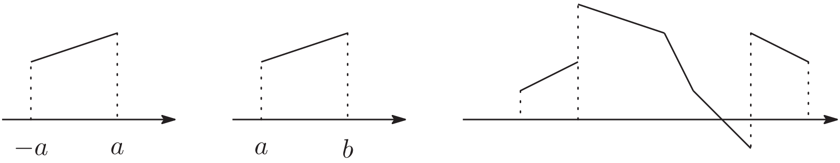
$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

[確かめ]

Fourier 変換

Fourier 積分

[例 3] 例 1, 2 に性質 1, 2 を適用して



のような関数でも $(\star 3)$ が成り立つので、近似により定理が証明される。

Fourier 変換
偏微分方程式への応用

熱方程式の解

熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

の解は

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)} f(y)\,dy$$

と表される。

Fourier 変換

偏微分方程式への応用

[確かめ] x に関する Fourier 変換を $\mathcal{F}(f)$ と書く。

両辺 Fourier 変換して

$$\mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}(u_{xx})$$

積分と微分の順序交換して

$$\text{左辺} = (\mathcal{F}(u))_t$$

性質 3 より

$$\text{右辺} = -\xi^2 \mathcal{F}(u)$$

Fourier 変換
偏微分方程式への応用

両辺比較して

$$(\mathcal{F}(u))_t = -\xi^2\mathcal{F}(u), \quad \mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f),$$

t の常微分方程式の初期値問題とみて

$$\mathcal{F}(u)(x,t) = \mathcal{F}(f)e^{-\xi^2 t}$$

両辺の共役 Fourier 変換をとって

$$(u)(x,t) = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)e^{-\xi^2 t})$$

性質 4 より

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \check{\mathcal{F}}(e^{-\xi^2 t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \frac{1}{\sqrt{2t}}(e^{-\frac{x^2}{4t}})$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}(e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}) f(y)\, dy$$