本日やること

1. ベクトル解析
   - 場の解析

ベクトル解析

場の解析

ベクトル場の渦の状態を調べたい。

そのための方法を考え、応用を述べる。

ベクトル解析

場の解析

ベクトル場の回転の定義

ベクトル場 $\vec{\boldsymbol{A}}(P) = (A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z))$ に対してベクトル場

$$\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

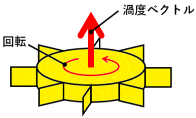
を $\vec{\boldsymbol{A}}$ の回転 (rotarion) といい記号 div$\vec{\boldsymbol{A}}$ であらわす。形式的な記法

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

も用いる。ただし $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ はハミルトン演算子, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は基本ベクトル。

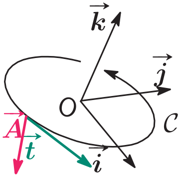
ベクトル解析
場の解析

ベクトルまわりの渦の強さ



$\vec{A}$: 連続微分可能なベクトル場
$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: ベクトルの正規直交系
$\mathcal{C}$: $\vec{i}, \vec{j}$ 平面内原点中心半径 r の円周

のとき，ベクトル場 $\vec{A}$ の，原点におけるベクトル $\vec{k}$ まわりの渦の強さは，($\mathcal{C}$ を右ねじ方向に向き付けて)



$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \bullet \vec{t}\, ds$$

であたえられるが，じつは

$$= \vec{k} \bullet \mathrm{rot}\vec{A}(O) \cdots (\clubsuit)$$

である。

ベクトル解析

場の解析

[確かめ] (Step 1) (♣) の左辺をテイラー近似を用いて計算する。

$$\nabla\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} (A_1)_x & (A_1)_y & (A_1)_z \\ (A_2)_x & (A_2)_y & (A_2)_z \\ (A_3)_x & (A_3)_y & (A_3)_z \end{pmatrix} \quad ((*)_x\text{は } x \text{ 偏導関数, 他も同じ})$$

と書くことにするとベクトル関数のテイラーの定理により

$$\vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P}) = \vec{\boldsymbol{A}}(O) + \overrightarrow{\mathsf{OP}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O) + \vec{\boldsymbol{K}}(\overrightarrow{\mathsf{OP}})$$

となるが, 誤差項 $\vec{\boldsymbol{K}}$ は

$$\lim_{\mathsf{P}\to\mathsf{O}} \frac{|\vec{\boldsymbol{K}}|}{|\overrightarrow{\mathsf{OP}}|} = 0 \quad \text{となることが知られており}$$

$$\left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathcal{C}} \vec{\boldsymbol{K}} \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\, ds\right| \leqq \frac{|\vec{\boldsymbol{K}}|}{r}\frac{1}{\pi r}\int_{\mathcal{C}} ds = 2\frac{|\vec{\boldsymbol{K}}|}{r} \to 0, \quad (r = |\overrightarrow{\mathsf{OP}}| \to 0)$$

ベクトル解析

場の解析

また

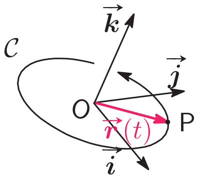
$$\int_C \vec{\boldsymbol{A}}(O) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\, ds = \vec{\boldsymbol{A}}(O) \bullet \int_C \vec{\boldsymbol{t}}\, ds = 0$$

だから 1 次の項のみ計算すればよい。

ベクトル解析

場の解析

(Step 2)　1 次の項の評価



$\mathcal{C}$ のパラメータ表示は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\cos t\,\vec{\boldsymbol{i}} + r\sin t\,\vec{\boldsymbol{j}}\,(= \overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)}\text{とおく})\quad 0 \leqq t \leqq 2\pi\ )$$

であり

$$\boldsymbol{t}\,ds = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}(t)\,dt$$

だから

$$\int_0^{2\pi} \vec{\boldsymbol{r}}(t)\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O) \bullet \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (r\cos t\,\vec{\boldsymbol{i}} + r\sin t\,\vec{\boldsymbol{j}}\,)\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O) \bullet (-r\sin t\,\vec{\boldsymbol{i}} + r\cos t\,\vec{\boldsymbol{j}}\,)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big((r^2\cos t\sin t)(\,\vec{\boldsymbol{i}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)\,{}^t\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)\,{}^t\vec{\boldsymbol{j}}\,)$$

$$+r^2\cos^2 t\,\vec{\boldsymbol{i}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)\,{}^t\vec{\boldsymbol{j}} - r^2\sin^2 t\,\vec{\boldsymbol{j}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)\,{}^t\vec{\boldsymbol{i}}\Big)\ dt$$

ベクトル解析

場の解析

ここで

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi$$

また $\vec{\boldsymbol{j}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)^t\vec{\boldsymbol{i}}$ はスカラーだから転置をしても変わらないので

$$\vec{\boldsymbol{j}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)^t\vec{\boldsymbol{i}} = {}^t\!\left(\vec{\boldsymbol{j}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)^t\vec{\boldsymbol{i}}\right) = \vec{\boldsymbol{i}}\,\nabla\vec{\boldsymbol{A}}(O)^t\vec{\boldsymbol{j}}$$

だから

$$\vec{\boldsymbol{i}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)^t\vec{\boldsymbol{j}} - \vec{\boldsymbol{j}}\,{}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)^t\vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{i}}\left({}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O) - \nabla\vec{\boldsymbol{A}}(O)\right){}^t\vec{\boldsymbol{j}}$$

に注意して

ベクトル解析

場の解析

$$
{}^{t}(\nabla\vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} (A_1)_x & (A_2)_x & (A_3)_x \\ (A_1)_y & (A_2)_y & (A_3)_y \\ (A_1)_z & (A_2)_z & (A_3)_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (A_1)_x & (A_1)_y & (A_1)_z \\ (A_2)_x & (A_2)_y & (A_2)_z \\ (A_3)_x & (A_3)_y & (A_3)_z \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} (A_1)_x - (A_1)_x & (A_2)_x - (A_1)_y & (A_3)_x - (A_1)_z \\ (A_1)_y - (A_2)_x & (A_2)_y - (A_2)_y & (A_3)_y - (A_2)_z \\ (A_1)_z - (A_3)_x & (A_2)_z - (A_3)_y & (A_3)_z - (A_3)_z \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(交代行列であることに注意)}
$$

ベクトル解析

場の解析

だから

$$\vec{\boldsymbol{i}}\ \left({}^t(\nabla\vec{\boldsymbol{A}})(O)-\nabla\vec{\boldsymbol{A}}(O)\right){}^t\vec{\boldsymbol{j}}$$

$$=(i_1,i_2,i_3)\begin{pmatrix} 0 & \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_2 & A_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_2 & A_3\end{vmatrix} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1\\ j_2\\ j_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix} i_1j_2+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_3\end{vmatrix} i_1j_3-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix} i_2j_1$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_2 & A_3\end{vmatrix} i_2j_3-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_3\end{vmatrix} i_3j_1-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_2 & A_3\end{vmatrix} i_3j_2$$

ベクトル解析

場の解析

$$= \begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_1 & i_3 \\ j_1 & j_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_2 & i_3 \\ j_2 & j_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_3 & i_1 \\ j_3 & j_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_2 & i_3 \\ j_2 & j_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

ここで $\vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \left(\begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} i_3 & i_1 \\ j_3 & j_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} i_2 & i_3 \\ j_2 & j_3 \end{vmatrix} \right)$ に注意して

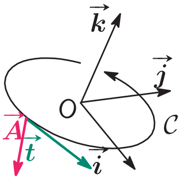
$$= \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{k}} \bullet \mathrm{rot} \vec{\boldsymbol{A}}$$

$(\clubsuit)$ はこれからすぐ出る。

ベクトル解析

場の解析

回転の本質



連続微分可能なベクトル場 $\vec{A}$ の回転 $\mathrm{rot}\vec{A}$ は

(i) 方向は，その周りでの渦の強さが最大になる方向で

(ii) 大きさはその時の渦の強さ

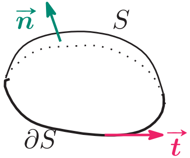
となるようなベクトルである。

(♣) を見ると，$\vec{k}$ が $|\vec{k}| = 1$ を満たしながら動くとき，渦の強さが最大になるのは $\vec{k}$ の向きが $\mathrm{rot}\vec{A}$ の向きと一致したときであることがわかる。

ベクトル解析

場の解析

ストークス (Stokes) の定理



S を向き付けられた曲面, $\vec{n}$ を S の正の向きの単位法線ベクトル, ∂S を S の境界に $\vec{n}$ を左に見て回るように向き付けた閉曲線, $\vec{t}$ を ∂S の正の向きの単位接線ベクトルとし, $\vec{A}(x, y, z)$ を連続微分可能なベクトル場とする. このとき

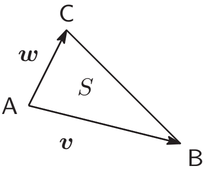
$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{A} \bullet \vec{n}\, dS = \int_{\partial S} \vec{A} \bullet \vec{t}\, ds$$

が成り立つ.

ベクトル解析

場の解析

[確かめ]



(Step 1)
S が図のような △ABC である場合に示す。
$\vec{v}$, $\vec{w}$ が右手系となるように向き付け，正の単位法線ベクトルを $\vec{n}$ とする。
明らかに

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

境界 ∂S は辺 AB, BC, CA をつなぎ，この順に向きを付けたもの。

ベクトル解析

場の解析

$\vec{\boldsymbol{A}} = (A_1, 0, 0) + (0, A_2, 0) + (0, 0, A_3)$ より

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{A}} = \mathrm{rot}(A_1, 0, 0) + \mathrm{rot}(0, A_2, 0) + \mathrm{rot}(0, 0, A_3)$$

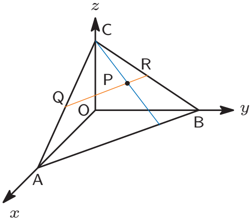
と分解して

$$\begin{aligned}
&\iint_S \mathrm{rot}(0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_2 & \vec{\boldsymbol{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS \cdots (\heartsuit)
\end{aligned}$$

だけまず計算する。

ベクトル解析

場の解析



S を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left((1-t)a\left(1-\frac{z}{c}\right), tb\left(1-\frac{z}{c}\right), z\right)$$

（これを $= \vec{r}(t,z)$ とおく）

$$0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq z \leqq c$$

のようにパラメータ表示する。

t 曲線は Q$\left(a\left(1-\frac{z}{c}\right), 0, z\right)$, R$\left(0, b\left(1-\frac{z}{c}\right), z\right)$ を結ぶ線分 QR。

$$\vec{r}_t = \left(-a\left(1-\frac{z}{c}\right), b\left(1-\frac{z}{c}\right), 0\right) = \left(1-\frac{z}{c}\right)(-a, b, 0)$$

$$\vec{r}_z = \left(-\frac{a}{c}(1-t), -\frac{b}{c}t, 1\right) = \frac{1}{c}(-a(1-t), -bt, c)$$

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_z = \frac{ab}{c}(c-z)\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$$

ベクトル解析

場の解析

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_2 & \vec{\boldsymbol{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} A_3 = \left(\frac{\partial}{\partial y} A_3, -\frac{\partial}{\partial x} A_3, 0 \right)$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}\, dS = (\vec{\boldsymbol{r}}_t \times \vec{\boldsymbol{r}}_z)\, dtdz = \frac{ab}{c}(c - z) \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right) dtdz$$

だから

$$(\heartsuit) = \frac{ab}{c} \int_0^c \int_0^1 (c - z) \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_3(\vec{\boldsymbol{r}}(t, z))\, dtdz$$

ベクトル解析

場の解析

ところで合成関数の微分法により

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} A_3(\vec{\boldsymbol{r}}(t,z)) &= \vec{\boldsymbol{r}}_t \bullet \mathrm{grad} A_3 \\
&= \left(1 - \frac{z}{c}\right)(-a, b, 0) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x}A_3, \frac{\partial}{\partial y}A_3, \frac{\partial}{\partial z}A_3, \right) \\
&= \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(-a\frac{\partial}{\partial x}A_3 + b\frac{\partial}{\partial y}A_3\right) = \frac{ab}{c}(c-z)\left(-\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial y}\right)A_3
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
(\heartsuit) &= \int_0^c \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} A_3(\vec{\boldsymbol{r}}(t,z))\, dtdz = \int_0^c \Big[A_3(\vec{\boldsymbol{r}}(t,z))\Big]_{t=0}^{t=1} dz \\
&= \int_0^c \left(-A_3(\vec{\boldsymbol{r}}(1,z)) + A_3(\vec{\boldsymbol{r}}(0,z))\right) dz
\end{aligned}
$$

ベクトル解析

場の解析

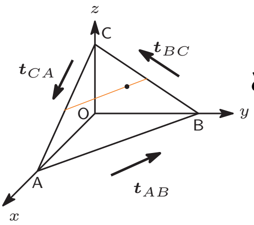
S の境界 ∂S の正の単位接ベクトルを

AB 上で $\vec{\boldsymbol{t}}_{AB}$, BC 上で $\vec{\boldsymbol{t}}_{BC}$, CA 上で $\vec{\boldsymbol{t}}_{CA}$

とすると

$$\vec{\boldsymbol{t}}_{CA}\,ds = -\vec{\boldsymbol{r}}_z(1,z)\,dz = \left(\frac{a}{c}, 0, -1\right)\,dz$$

$$\vec{\boldsymbol{t}}_{BC}\,ds = \vec{\boldsymbol{r}}_z(0,z)\,dz = \left(0, -\frac{b}{c}, 1\right)\,dz$$



だから

$$(\heartsuit) = \int_{CA} (0,0,A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}_{CA}\,ds + \int_{AB} (0,0,A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}_{AB}\,ds + \int_{BC} (0,0,A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}_{BC}\,ds$$

ベクトル解析

場の解析

即ち

$$\iint_S \mathrm{rot}(0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_{\partial S} (0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\, ds$$

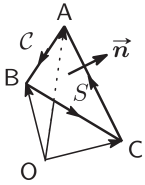
$\mathrm{rot}(A_1, 0, 0)$, $\mathrm{rot}(0, A_2, 0)$ **についても同様だからこれらを加えて**

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_{\partial S} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\, ds$$

ベクトル解析

場の解析

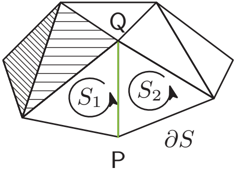
(Step 2)



S が一般の三角形である場合。

(step 1) と同様の計算が可能である。

(Step 3)



S が三角形をつなぎ合わせた多面体である場合。

隣り合う面 S_1, S_2 の境界 PQ は向き付けが反対になるので線積分は打ち消しあう。したがって一番外側の境界 ∂S の線積分のみが残るので

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{A} \bullet \vec{n}\, dS = \int_{\partial S} \vec{A} \bullet \vec{t}\, ds$$

ベクトル解析

場の解析

(Step 4) 一般のなめらかな曲面の場合
三角形を組み合わせた多面体で近似して極限をとる。