

本日よりこと

- ① ベクトル解析
 - 場の解析

ベクトル解析

場の解析

ベクトル場の回転

ベクトル場 $\vec{A}(P) = (A_1(x, y, z), A_2(x, y, z), A_3(x, y, z))$ に対してベクトル場

$$\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right)$$

を \vec{A} の回転 (rotarion) といい記号 $\text{div} \vec{A}$ であらわす。形式的な記法

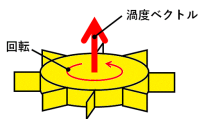
$$\nabla \times \vec{A} = \left(\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ A_3 & A_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{array} \right| \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

も用いる。ただし $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ はハミルトン演算子, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は基本ベクトル。

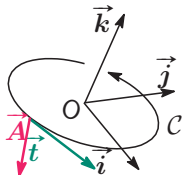
ベクトル解析

場の解析

ベクトルまわりの渦の強さ

 \vec{A} : 連続微分可能なベクトル場 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$: ベクトルの正規直交系 C : \vec{i}, \vec{j} 平面内原点中心半径 r の円周

のとき、ベクトル場 \vec{A} の、原点におけるベクトル \vec{k} まわりの渦の強さは、(C を右ねじ方向に向き付けて)



$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_C \vec{A} \cdot \vec{t} \, ds$$

であたえられるが、じつは

$$= \vec{k} \cdot \text{rot} \vec{A}(O) \cdots (\clubsuit)$$

である。

ベクトル解析

場の解析

[確かめ] (Step 1)

$$\nabla \vec{A} = \begin{pmatrix} (A_1)_x & (A_1)_y & (A_1)_z \\ (A_2)_x & (A_2)_y & (A_2)_z \\ (A_3)_x & (A_3)_y & (A_3)_z \end{pmatrix} \quad ((*)_x \text{ は } x \text{ 偏導関数, 他も同じ})$$

と書くことにするとベクトル関数のテイラーの定理により

$$\vec{A}(P) = \vec{A}(O) + \overrightarrow{OP} {}^t(\nabla \vec{A})(O) + \vec{K}(\overrightarrow{OP})$$

となるが、誤差項 \vec{K} は

$$\lim_{P \rightarrow O} \frac{|\vec{K}|}{|\overrightarrow{OP}|} = 0 \quad \text{となることが知られており}$$

$$\left| \frac{1}{\pi r^2} \int_C \vec{K} \cdot \vec{t} \, ds \right| \leq \frac{|\vec{K}|}{r} \frac{1}{\pi r} \int_C ds = 2 \frac{|\vec{K}|}{r} \rightarrow 0, \quad (r = |\overrightarrow{OP}| \rightarrow 0)$$

ベクトル解析

場の解析

また

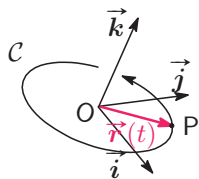
$$\int_C \vec{A}(O) \cdot \vec{t} \, ds = \vec{A}(O) \cdot \int_C \vec{t} \, ds = 0$$

だから 1 次の項のみ計算すればよい。

ベクトル解析

場の解析

(Step 2) 1 次の項の評価

 C のパラメータ表示は

$$\vec{OP} = r \cos t \vec{i} + r \sin t \vec{j} (= \vec{r}(t) \text{ とおく}) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

であり

$$t ds = \dot{\vec{r}}(t) dt$$

だから

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \vec{r}(t) {}^t(\nabla \vec{A})(O) \bullet \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r \cos t \vec{i} + r \sin t \vec{j}) {}^t(\nabla \vec{A})(O) \bullet (-r \sin t \vec{i} + r \cos t \vec{j}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left((r^2 \cos t \sin t) (\vec{i} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{i} + \vec{j} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{j}) \right. \\ & \quad \left. + r^2 \cos^2 t \vec{i} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{j} - r^2 \sin^2 t \vec{j} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{i} \right) dt \end{aligned}$$

ベクトル解析

場の解析

ここで

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$$

また $\vec{j} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{i}$ はスカラーだから転置をしても変わらないので

$$\vec{j} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{i} = {}^t(\vec{j} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{i}) = \vec{i} \nabla \vec{A}(O) {}^t\vec{j}$$

だから

$$\vec{i} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{j} - \vec{j} {}^t(\nabla \vec{A})(O) {}^t\vec{i} = \vec{i} \left({}^t(\nabla \vec{A})(O) - \nabla \vec{A}(O) \right) {}^t\vec{j}$$

に注意して

ベクトル解析

場の解析

$$\begin{aligned}
{}^t(\nabla \vec{A}) - \nabla \vec{A} &= \begin{pmatrix} (A_1)_x & (A_2)_x & (A_3)_x \\ (A_1)_y & (A_2)_y & (A_3)_y \\ (A_1)_z & (A_2)_z & (A_3)_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (A_1)_x & (A_1)_y & (A_1)_z \\ (A_2)_x & (A_2)_y & (A_2)_z \\ (A_3)_x & (A_3)_y & (A_3)_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_1)_x - (A_1)_x & (A_2)_x - (A_1)_y & (A_3)_x - (A_1)_z \\ (A_1)_y - (A_2)_x & (A_2)_y - (A_2)_y & (A_3)_y - (A_2)_z \\ (A_1)_z - (A_3)_x & (A_2)_z - (A_3)_y & (A_3)_z - (A_3)_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{交代行列であることに注意})
\end{aligned}$$

ベクトル解析

場の解析

だから

$$\begin{aligned}
& \vec{i} \left({}^t(\nabla \vec{A})(O) - \nabla \vec{A}(O) \right) {}^t \vec{j} \\
&= (i_1, i_2, i_3) \begin{pmatrix} 0 & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} & 0 & \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} i_1 j_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} i_1 j_3 - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} i_2 j_1 \\
&+ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} i_2 j_3 - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} i_3 j_1 - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} i_3 j_2
\end{aligned}$$

ベクトル解析

場の解析

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_1 & i_3 \\ j_1 & j_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_2 & i_3 \\ j_2 & j_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_3 & i_1 \\ j_3 & j_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ A_3 & A_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_2 & i_3 \\ j_2 & j_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j} = \left(\begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} i_3 & i_1 \\ j_3 & j_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} i_2 & i_3 \\ j_2 & j_3 \end{vmatrix} \right)$ に注意して

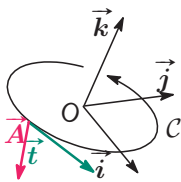
$$= \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{k} \bullet \text{rot} \vec{A}$$

(♣) はこれからすぐ出る。

ベクトル解析

場の解析

回転の本質



連続微分可能なベクトル場 \vec{A} の回転 $\text{rot } \vec{A}$ は

- (i) 方向は、その周りでの渦の強さが最大になる方向で
- (ii) 大きさはその時の渦の強さ

となるようなベクトルである。

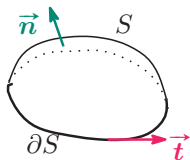
(♣) からあきらかである。

ベクトル解析

場の解析

ストークス (Stokes) の定理

S を向き付けられた曲面, \vec{n} を S の正の向きの単位法線ベクトル, ∂S を S の境界に \vec{n} を左に見て回るように向き付けた閉曲線, \vec{t} を ∂S の正の向きの単位接線ベクトルとし, $\vec{A}(x, y, z)$ を連続微分可能なベクトル場とする.
このとき



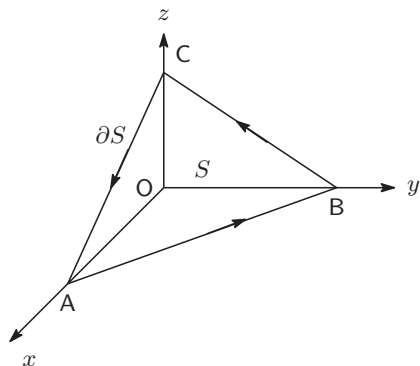
$$\iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t} \, ds$$

が成り立つ.

ベクトル解析

場の解析

[確かめ]



(Step 1)

 S が図のような $\triangle ABC$ $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c),$ $a, b, c > 0$

である場合。上方が表側となるように向き付ける。方程式は

$$S: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

境界 ∂S は辺 AB, BC, CA をつないだもの。図のように向き付ける。

ベクトル解析

場の解析

$$\vec{A} = (A_1, 0, 0) + (0, A_2, 0) + (0, 0, A_3) \text{ より}$$

$$\text{rot}\vec{A} = \text{rot}(A_1, 0, 0) + \text{rot}(0, A_2, 0) + \text{rot}(0, 0, A_3)$$

と分解して

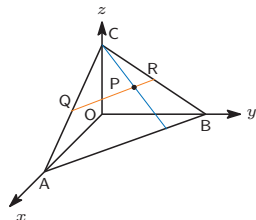
$$\begin{aligned} & \iint_S \text{rot}(0, 0, A_3) \bullet \vec{n} dS \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} \bullet \vec{n} dS \cdots (\heartsuit) \end{aligned}$$

だけまず計算する。

ベクトル解析

場の解析

S を



$$\overrightarrow{OP} = \left((1-t)a \left(1 - \frac{z}{c}\right), tb \left(1 - \frac{z}{c}\right), z \right)$$

(これを $= \vec{r}(t, z)$ とおく)

$$0 \leq t \leq 1, 0 \leq z \leq c$$

のようにパラメータ表示する。

t 曲線は $Q(a(1 - \frac{z}{c}), 0, z)$, $R(0, b(1 - \frac{z}{c}), z)$ を結ぶ線分 QR 。

$$\vec{r}_t = \left(-a \left(1 - \frac{z}{c}\right), b \left(1 - \frac{z}{c}\right), 0 \right) = \left(1 - \frac{z}{c}\right) (-a, b, 0)$$

$$\vec{r}_z = \left(-\frac{a}{c}(1-t), -\frac{b}{c}t, 1 \right) = \frac{1}{c} (-a(1-t), -bt, c)$$

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_z = \frac{ab}{c} (c-z) \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$$

ベクトル解析

場の解析

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} A_3 = \left(\frac{\partial}{\partial y} A_3, -\frac{\partial}{\partial x} A_3, 0 \right)$$

$$\vec{n} dS = (\vec{r}_t \times \vec{r}_z) dt dz = \frac{ab}{c} (c-z) \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right) dt dz$$

だから

$$(\heartsuit) = \frac{ab}{c} \int_0^c \int_0^1 (c-z) \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \right) A_3(\vec{r}(t, z)) dt dz$$

ベクトル解析

場の解析

ところで合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} A_3(\vec{\mathbf{r}}(t, z)) &= \vec{\mathbf{r}}_t \bullet \text{grad} A_3 \\ &= \left(1 - \frac{z}{c}\right) (-a, b, 0) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x} A_3, \frac{\partial}{\partial y} A_3, \frac{\partial}{\partial z} A_3\right) \\ &= \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(-a \frac{\partial}{\partial x} A_3 + b \frac{\partial}{\partial y} A_3\right) = \frac{ab}{c} (c - z) \left(-\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y}\right) A_3\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}(\heartsuit) &= \int_0^c \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} A_3(\vec{\mathbf{r}}(t, z)) dt dz = \int_0^c \left[A_3(\vec{\mathbf{r}}(t, z)) \right]_{t=0}^{t=1} dz \\ &= \int_0^c (-A_3(\vec{\mathbf{r}}(1, z)) + A_3(\vec{\mathbf{r}}(0, z))) dz\end{aligned}$$

ベクトル解析

場の解析

S の境界 ∂S の正の単位接ベクトルを

AB 上で \vec{t}_{AB} , BC 上で \vec{t}_{BC} , CA 上で \vec{t}_{CA}

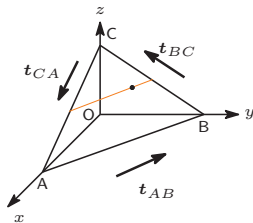
とすると

$$\vec{t}_{CA} ds = -\vec{r}_z(1, z) dz = \left(\frac{a}{c}, 0, -1\right) dz$$

$$\vec{t}_{BC} ds = \vec{r}_z(0, z) dz = \left(0, -\frac{b}{c}, 1\right) dz$$

だから

$$\begin{aligned} (\heartsuit) &= \int_{CA} (0, 0, A_3) \cdot \vec{t}_{CA} ds \\ &\quad + \int_{AB} (0, 0, A_3) \cdot \vec{t}_{AB} ds + \int_{BC} (0, 0, A_3) \cdot \vec{t}_{BC} ds \end{aligned}$$



ベクトル解析

場の解析

即ち

$$\iint_S \text{rot}(0, 0, A_3) \bullet \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} (0, 0, A_3) \bullet \vec{t} \, ds$$

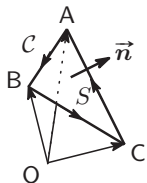
$\text{rot}(A_1, 0, 0)$, $\text{rot}(0, A_2, 0)$ についても同様だからこれらを加えて

$$\iint_S \text{rot} \vec{A} \bullet \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{A} \bullet \vec{t} \, ds$$

ベクトル解析

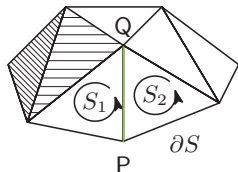
場の解析

(Step 2)

 S が一般の三角形である場合。

(step 1) と同様の計算が可能である。

(Step 3)

 S が三角形をつなぎ合わせた多面体である場合。隣り合う面 S_1, S_2 の境界 PQ は向き付けが反対になるので線積分は打ち消しあう。したがって一番外側の境界 ∂S の線積分のみが残るので

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot \vec{t} \, ds$$

ベクトル解析

場の解析

(Step 4) 一般のなめらかな曲面の場合
三角形を組み合わせた多面体で近似して極限をとる。

