本日やること

1. ベクトル解析
   - 場の解析

ベクトル解析

場の解析

ベクトル場の発散

ベクトル場 $\vec{A}(P) = (A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z))$ に対して

スカラー場 $\dfrac{\partial A_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial A_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial A_3}{\partial z}(x,y,z)$

を $\vec{A}$ の発散 (divergence) という。

記号 div$\vec{A}$, $\nabla \bullet \vec{A}, \cdots$ であらわす。

ベクトル解析

場の解析

例：クーロン場の発散

$$\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \frac{(x, y, z)}{r^3}\ \text{のとき}$$

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \begin{cases} 0, & (\mathrm{P} \neq \mathrm{O}\ \text{のとき}) \\ \text{定義できない}, & (\mathrm{P} = \mathrm{O}\ \text{のとき}) \end{cases}$$

ベクトル解析

場の解析

ガウスの発散定理

G を空間の有界閉領域, S を G の表面に外向きに向き付けたもの, $\boldsymbol{n}$ を S の外向き単位法線ベクトルとし $\boldsymbol{A} = (A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z))$ を連続微分可能なベクトル場とする. このとき

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_G \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}\, dxdydz$$

が成り立つ.

これは区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ に対する

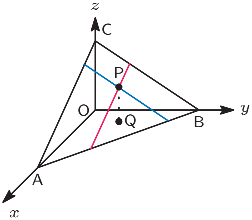
$$\int_a^b f'(x)\, dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

を領域 G に拡張したものである。

ベクトル解析

場の解析

[確かめ] (Step 1) G が図のような 4 面体 OABC (A$(a,0,0)$, B$(0,b,0)$, C$(0,0,c)$) である場合。



ABC は関数 $z = c\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)$ のグラフだから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(x, y, c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\right) \text{（これを } \vec{\boldsymbol{r}}(x,y) \text{ とおく）}$$

$$(x,y) \in \triangle \mathrm{OAB}$$

のようにパラメータ表示される。

累次積分により (Q$(x,y,0)$ として)

$$\iiint_G \frac{\partial A_3}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{\triangle \mathrm{OAB}} \left(\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} \frac{\partial A_3}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right) dxdy$$

$$= \iint_{\triangle \mathrm{OAB}} (A_3(\mathrm{P}) - A_3(\mathrm{Q}))\,dxdy$$

ベクトル解析
場の解析

一方

$$\vec{\boldsymbol{r}}_x = \left(1, 0, -\frac{c}{a}\right), \quad \vec{\boldsymbol{r}}_y = \left(0, 1, -\frac{c}{b}\right), \quad \vec{\boldsymbol{r}}_x \times \vec{\boldsymbol{r}}_y = \left(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}, 1\right)$$

だから

$$\begin{aligned}\iint_{\mathsf{ABC}} (0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS &= \iint_{\mathsf{OAB}} (0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{r}}_x \times \vec{\boldsymbol{r}}_y\, dxdy \\ &= \iint_{\mathsf{OAB}} A_3(\mathsf{P})\, dxdy\end{aligned}$$

$$\iint_{\mathsf{OAB}} (0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = -\iint_{\mathsf{OAB}} A_3(\mathsf{Q})\, dxdy \quad (\vec{\boldsymbol{n}} = (0, 0, -1) \text{ だから})$$

$$\iint_{\text{その他の三角形}} (0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = 0 \quad (\vec{\boldsymbol{n}} \perp (0, 0, A_3) \text{ だから})$$

まとめて

$$\iint_S (0, 0, A_3) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_G \frac{\partial A_3}{\partial z}(x, y, z)\, dxdydz$$

ベクトル解析

場の解析

同様にして

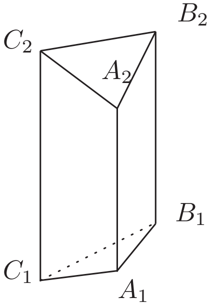
$$\iint_S (A_1, 0, 0) \bullet \vec{n}\, dS = \iiint_G \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, y, z)\, dxdydz$$
$$\iint_S (0, A_2, 0) \bullet \vec{n}\, dS = \iiint_G \frac{\partial A_2}{\partial y}(x, y, z)\, dxdydz$$

だからこれらを加えて

$$\iint_S \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_G \mathrm{div}\boldsymbol{A}(x, y, z)\, dxdydz$$

ベクトル解析
場の解析

(Step 2)

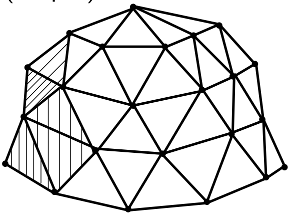


G が図のような立体である場合も同様なことが成り立つ。

ベクトル解析

場の解析

(Step 3)



多面体の場合。(Step 2) のような 4 面体に分割して計算して総和する。2 つの 4 面体が接している面での面積分は打ち消しあって 0 になるから, 元の境界での面積分だけが残る。

(Step 4) 一般の領域 G の場合. 多面体で近似して考える。

ベクトル解析

場の解析

[div$\vec{A}$ の本質：点 P での湧き出し率]
点 P を含み, 座標軸に平行な辺をもつような立方体 E をとるとき,

$$\lim_{E \to \mathrm{P}} \frac{1}{V(E)} \iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS = \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P)$$

ただし

$\lim_{E\to\mathrm{P}}$：E を 1 点 P に縮めていったときの極限,

S：E の表面に外向きに向きを付けたもの,

$\boldsymbol{n}$：外向き単位法線ベクトル,

$V(E)$：E の体積.

つまり div$\vec{\boldsymbol{A}}(P)$ は単位体積当たりの $\boldsymbol{A}$ の湧き出しの 1 点 P への極限。

ベクトル解析

場の解析

[クーロン場の発散再考]

ガウスの発散定理は $\vec{\boldsymbol{A}}$ が連続微分可能でないときは適用できないことがある。典型例はクーロン場

$$\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \frac{(x, y, z)}{r^3}$$

の場合である。これは原点で定義されていないし、仮に原点で $=$ 何かの実数 と定義しても微分可能にならない。しかし次が分かっている。

G は $\mathbb{R}^3$ の領域, S は G の境界で S は連続微分可能なパラメータ表示を持つ曲面であるとする。$\vec{\boldsymbol{n}}$ を外向き単位法ベクトルとする。
このとき

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS = \begin{cases} 0, & (\mathrm{O} \notin G \text{ のとき}) \\ 4\pi, & (\mathrm{O} \in G \text{ のとき}) \end{cases}$$

ベクトル解析

場の解析

したがって原点に湧き出しが集中しているものと考えられる。このことを

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}} = 4\pi\delta_0$$

と表す。δ_0 はデルタ関数と呼ばれるが普通の意味の関数ではなく超関数と呼ばれるものの一種である。

電気では難しい数学を使わざるを得ない場面がある。少しづつがんばりましょう。