# 本日やること

1. ベクトル解析
   - 場の解析

# ベクトル解析

## 場の解析

### 復習：スカラー場の勾配の定義

平面の (空間の) スカラー場 $\mathrm{P} \mapsto f(P)$ は P の座標 $(x, y)$ ($(x, y, z)$) を使うと 2 変数 (3 変数) 関数とみなせるので, $x$, $y$, ($z$) で偏微分ができる.

$$\mathrm{P}(x, y) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P})\right) \quad \text{平面の場合}$$

$$\mathrm{P}(x, y, z) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{P})\right) \quad \text{空間の場合}$$

で決まるベクトル場をスカラー場 $f$ の勾配 (gradient) と呼び

$$\mathrm{grad}\, f, \quad \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}), \quad \mathrm{grad}\, f(x, y, z)$$

などの記号で表す.

# ベクトル解析

## 場の解析

### 復習：ハミルトン演算子による勾配の表示

形式的記号

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$

をハミルトン (Hamilton) 演算子またはナブラ (nabla) と呼ぶ.
これらを用いると grad$f$ は

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f\right) \quad = \nabla f$$

とかける。

# ベクトル解析

## 場の解析

### 復習：スカラー場の方向微分

スカラー場 $f$ の $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向微分係数を

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathsf{P}) - f(\mathsf{P}_0)}{s}$$

で定める．ただし

$\vec{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ : 単位ベクトル.

$s$ : 実数のパラメータ

$\mathsf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathsf{P}(x, y, z)$ は　$\overrightarrow{\mathsf{P}_0\mathsf{P}} = s\vec{\boldsymbol{u}}$ をみたす.

# ベクトル解析

## 場の解析

**復習：スカラー場の方向微分と勾配**

(i)　スカラー場 $f(P)$ が $(x, y, z$ の関数とみて) 偏微分可能，かつ各偏導関数が連続であるとき，ベクトル $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向の方向微分は存在して

$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \cdots (\star)$$

に等しい．

(ii)　$\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)$ は，$\vec{\boldsymbol{u}}$ を $|\vec{\boldsymbol{u}}| = 1$ を満たしながら変化させたとき，

① 向きは $f$ の $\mathrm{P}_0$ における方向微分係数 $(\star)$ が最大になる $\vec{\boldsymbol{u}}$ の向き

② 大きさはその時の方向微分係数の値

であるようなベクトルである。

このことは $\mathrm{grad}\, f$ が座標系の取り方に依存しないことも示している．

# ベクトル解析

## 場の解析

[確かめ] (i) は 2 変数 (3 変数) 関数の場合と全く同じ。(ii) は

$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) = |\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)| \cos\theta \quad (\theta \text{は } \vec{\boldsymbol{u}} \text{ と } \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \text{ のなす角})$$

だから $(\star)$ は $\vec{\boldsymbol{u}}$ と $\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)$ が同じ向きのとき最大値 $|\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)|$ をとるから明らか.

# ベクトル解析

## 場の解析

### スカラー場の等高線・等位面

連続なスカラー場 $f$ と定数 $c$ に対して, 集合 $\{\mathrm{P}; f(\mathrm{P}) = c\}$ は, 一般に平面の場合曲線, 空間の場合曲面となる. この曲線 (曲面) をスカラー場 $f$ の等高線 (等位面) という。

等高線の接線 (等位面の接平面) と勾配 $\mathrm{grad} f$ は直交する。

[考え方] A を等位面 $S$ 上の点とし, $S$ 上の A をとおる曲線 $C$ のパラメータ表示を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$ とする。

$f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \equiv 0$ だから $\dfrac{d}{dt} f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) = 0.$　一方合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt} f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) = \mathrm{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d}{dt} \vec{\boldsymbol{r}}(t)$$

だから $C$ の各点での接線はその点での勾配と直交する。これは接平面と勾配が直交することを意味する。

# ベクトル解析

## 場の解析

保存場とスカラーポテンシャル

$\vec{A}$ : ベクトル場, $f$ : スカラー場 が

$$\vec{A} = -\mathrm{grad}\, f$$

をみたすとき,

$\vec{A}$ は保存場である

$f$ は $\vec{A}$ のスカラーポテンシャルである

という。

# ベクトル解析

## 場の解析

### 例　クーロン場のポテンシャル

スカラー場

$$f(x,y,z)=\frac{1}{r},\quad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

はベクトル場

$$\vec{\boldsymbol{A}}=\frac{(x,y,z)}{r^3}$$

のスカラーポテンシャルである。

# ベクトル解析

## 場の解析

[確かめ]

$$\mathrm{grad} f = \left( \left(\frac{1}{r}\right)_x, \left(\frac{1}{r}\right)_y, \left(\frac{1}{r}\right)_z \right)$$

であるが $r_x = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$

$\left(\dfrac{1}{r}\right)_x = \left(\dfrac{1}{r}\right)_r r_x = -\dfrac{r_x}{r^2} = -\dfrac{x}{r^3}$ 同様に $\left(\dfrac{1}{r}\right)_y = -\dfrac{y}{r^3}$, $\left(\dfrac{1}{r}\right)_z = -\dfrac{z}{r^3}$,

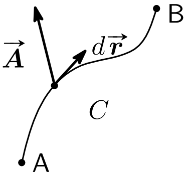
だから

$$-\mathrm{grad} f = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{(x, y, z)}{r^3} = \vec{\boldsymbol{A}}$$

# ベクトル解析

## 場の解析

### 保存場の線積分




$\vec{\boldsymbol{A}} = -\mathrm{grad}\, f,$

$C$ : 点 A から点 B に向き付けられた曲線

$$\Rightarrow \int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = f(A) - f(B)$$

(積分は途中経路 $C$ によらない！！)

[確かめ]

$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t),\ a \leqq t \leqq b$, 正のパラメータ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$

とする。

# ベクトル解析

## 場の解析

[復習：合成関数の微分法]

$$x \mapsto t \mapsto y \quad \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \times \frac{dy}{dt}$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, mapsto] & \\ t \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & z \\ & y \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd} \quad \text{のとき} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \times \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \times \frac{\partial z}{\partial y}$$

[確かめ (続き)]

$$\text{左辺} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt}\,dt = -\int_a^b \mathrm{grad}\, f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\,dt$$

$$= -\int_a^b \left( f(\vec{\boldsymbol{r}})_x \frac{dx}{dt} + f(\vec{\boldsymbol{r}})_y \frac{dy}{dt} + f(\vec{\boldsymbol{r}})_z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= -\int_a^b \frac{df(\vec{\boldsymbol{r}}(t))}{dt}\,dt = -\Big[ f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \Big]_a^b = \text{右辺}$$

($F(P)$ を $F(\vec{\boldsymbol{r}})$ などと書いた)