# 本日やること

1. ベクトル解析
   - 場の解析

# ベクトル解析

## 場の解析

**復習：2 変数関数の合成関数の微分法 (II)**

[平面の場合]　$z = f(x, y)$ ： 連続微分可能

$x = x(t)$, $y = y(t)$ ： 微分可能　(変数記号と関数記号に同じ文字を使った)

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(x(t), y(t))$ も微分可能で

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

[空間の場合]　同様に

$u = f(x, y, z)$ が $x, y, z$ で偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ： $t$ で微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $u = f(x(t), y(t), z(t))$ も微分可能で

$$f(P)_t = x_t f(P)_x + y_t f(P)_y + z_t f(P)_z \quad \cdots (\star\star)$$

# ベクトル解析

## 場の解析

[確かめ]
$t$ が $\Delta t$ だけ変化するとき $x, y, z$ は

$$\begin{aligned} \Delta x &= \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) \\ \Delta y &= \psi(t+\Delta t) - \psi(t) \\ \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & \Delta x \\ & x \arrow[dr] & \\ \Delta t \quad t \arrow[ur] \arrow[dr] & & z \quad \Delta z \\ & y \arrow[ur] & \\ & \Delta y \end{tikzcd}$$

だけ変動する．ここで

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

関数 $t \mapsto f(x+t\Delta x, y+\Delta y)$, $t \mapsto f(x, y+t\Delta y)$, $0 \leqq t \leqq 1$ にラグランジュの平均値の定理 を使うと

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0<\theta_1<1, \quad 0<\theta_2<1$$

となる $\theta_1$, $\theta_2$ がある。．

# ベクトル解析

## 場の解析

この両辺を $\varDelta t$ で割って

$$\frac{\varDelta z}{\varDelta t} = f_x(x+\theta_1\varDelta x, y+\varDelta y)\frac{\varDelta x}{\varDelta t} + f_y(x, y+\theta_2\varDelta y)\frac{\varDelta y}{\varDelta t}$$

$\varDelta t \to 0$ とすると $\varDelta x, \varDelta y \to 0$ となり

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \to \frac{dx}{dt} \qquad \frac{\varDelta y}{\varDelta t} \to \frac{dy}{dt}$$

また $f_x$, $f_y$ が連続だから

$$f_x(x+\theta_1\varDelta x, y+\varDelta y) \to f_x(x, y), \qquad f_y(x, y+\theta_2\varDelta y) \to f_y(x, y)$$

となるので

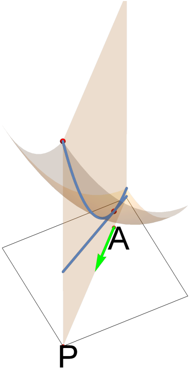
$$\frac{\varDelta z}{\varDelta t} \to (\star\star) \text{ の右辺}$$

がわかる.

# ベクトル解析

## 場の解析

### 復習：2 変数関数の方向微分係数の定義




$z = f(x, y)$ : 2 変数関数
A$(a, b)$ : $xy$ 平面の定点.
$\vec{u}$ : $xy$ 平面の大きさ 1 のベクトル.
$\ell$ : A をとおり $\vec{u}$ に平行な直線
P$(x, y)$ : $\ell$ 上の動点

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{u}, \quad t \text{ は実数のパラメータ}$$

と表される.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{A})}{t}$$

が存在するとき $f(x, y)$ の点 A$(a, b)$ における $\vec{u}$ 方向微分係数と呼ぶ. (ただし, $f(\mathrm{P})$, $f(\mathrm{A})$ はそれぞれ $f(x, y)$, $f(a, b)$ を意味する.)

# ベクトル解析

## 場の解析

復習：2 変数関数の方向微分可能性・方向微分係数の表示

$f(x, y)$ は連続微分可能とする。

(i) 大きさ 1 の任意のベクトル $\vec{\boldsymbol{u}}$ に対して，点 A$(a, b)$ における $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向微分係数は存在する。

(ii) $\vec{\boldsymbol{u}}$ の成分表示を $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2)$ とすると

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{A})}{t} = u_1 f_x(a, b) + u_2 f_y(a, b)$$

である．

このことは 3 変数関数 $f(x, y, z)$，空間のスカラー場 $f(\mathrm{P})$ についても成り立つ。

# ベクトル解析

## 場の解析

[確かめ]

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{\boldsymbol{u}} \iff x = a + tu_1, y = b + tu_2$$

だから

$$f(\mathrm{P}) = f(a + tu_1, b + tu_2)$$

ここで右辺 $= F(t)$ とおいて合成関数の微分法をつかうと

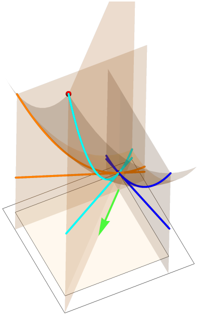
$$F'(t) = f_x(a + tu_1, b + tu_2)u_1 + f_y(a + tu_1, b + tu_2)u_2,$$

ところで

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{A})}{t} = F'(0) = u_1 f_x(a, b) + u_2 f_y(a, b)$$

# ベクトル解析

## 場の解析



連続微分可能な関数 $z = f(x, y)$ のグラフは接平面を持つ。

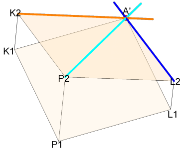
[考え方]　曲面 $z = f(x, y)$ に対して，

$x$ 方向切り口，$x$ 方向接線，

$y$ 方向切り口，$y$ 方向接線，

$\vec{u}$ 方向切り口，$\vec{u}$ 方向接線

を作る。$f(x, y)$ が連続微分可能であるとき，3 接線は同一平面上にある。(これが接平面になる。)



# ベクトル解析

## 場の解析

### スカラー場の勾配の定義

平面の (空間の) スカラー場 P $\mapsto f(P)$ は P の座標 $(x, y)$ ($(x, y, z)$) を使うと 2 変数 (3 変数) 関数とみなせるので, $x$, $y$, ($z$) で偏微分ができる.

$$\mathrm{P}(x, y) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P})\right) \quad \text{平面の場合}$$

$$\mathrm{P}(x, y, z) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{P})\right) \quad \text{空間の場合}$$

で決まるベクトル場をスカラー場 $f$ の勾配 (gradient) と呼び

$$\mathrm{grad}\, f, \quad \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}), \quad \mathrm{grad}\, f(x, y, z)$$

などの記号で表す.

# ベクトル解析

## 場の解析

### ハミルトン演算子による勾配の表示

形式的記号

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$

をハミルトン (Hamilton) 演算子またはナブラ (nabla) と呼ぶ.
これらを用いると grad$f$ は

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f\right) \quad = \nabla f$$

とかける。

# ベクトル解析

## 場の解析

### スカラー場の方向微分

スカラー場 $f$ の $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向微分係数を

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathsf{P}) - f(\mathsf{P}_0)}{s}$$

で定める．ただし

$\vec{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2, u_3)$：単位ベクトル．

$s$：実数のパラメータ

$\mathsf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathsf{P}(x, y, z)$ は　$\overrightarrow{\mathsf{P}_0\mathsf{P}} = s\vec{\boldsymbol{u}}$ をみたす．

# ベクトル解析

## 場の解析

### スカラー場の方向微分と勾配

(i) スカラー場 $f(P)$ が $(x, y, z$ の関数とみて) 偏微分可能，かつ各偏導関数が連続であるとき，ベクトル $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向の方向微分は存在して

$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \cdots (\star)$$

に等しい.

(ii) $\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)$ は，$\vec{\boldsymbol{u}}$ を $|\vec{\boldsymbol{u}}| = 1$ を満たしながら変化させたとき，

① 向きは $f$ の $\mathrm{P}_0$ における方向微分係数 $(\star)$ が最大になる $\vec{\boldsymbol{u}}$ の向き

② 大きさはその時の方向微分係数の値

であるようなベクトルである。

このことは $\mathrm{grad}\, f$ が座標系の取り方に依存しないことも示している.

# ベクトル解析

## 場の解析

[確かめ] (i) は 2 変数 (3 変数) 関数の場合と全く同じ。(ii) は

$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) = |\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)| \cos\theta \quad (\theta\text{は } \vec{\boldsymbol{u}} \text{ と } \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \text{ のなす角})$$

だから $(\star)$ は $\vec{\boldsymbol{u}}$ と $\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)$ が同じ向きのとき最大値 $|\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)|$ をとるから明らか.