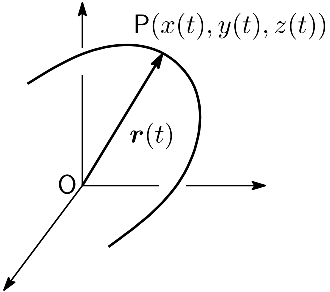
本日やること

1. ベクトル解析
   - 復習：曲線
   - 曲面と面積分
   - 場の解析

ベクトル解析
曲線と線積分

曲線のパラメータ表示

曲線のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(t)$：連続な 1 変数ベクトル値関数

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \qquad (\star)$$

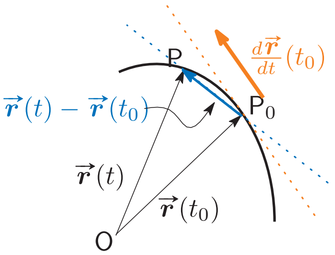
を満たす点 P の軌跡 C は連続な曲線となる.

$(\star)$ を曲線 C のパラメータ表示といい, t をパラメータという。

ベクトル解析

曲線と線積分

接ベクトル



$t=t_0$ のとき P$_0$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\vec{\boldsymbol{r}}(t_0)$ で定める。

$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(t_0)\neq\mathbf{0}$ であるとき

$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(t_0)$ (の 0 でない定数倍) は，P$_0$ における C の接ベクトルとなる。

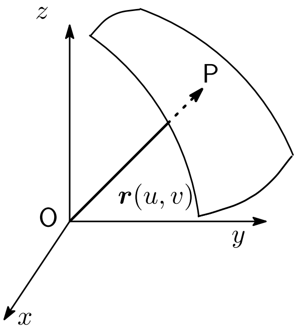
[考え方]　$t\to t_0$ とすると P→P$_0$ となるので直線 P$_0$P は曲線の接線に近づくと考えられるが

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}(t)-\vec{\boldsymbol{r}}(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}}{t-t_0}$$

だから $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(t_0)$ は接線の方向ベクトルとなる。

ベクトル解析
曲面と面積分

曲面のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(u,v)$: 連続な 2 変数ベクトル値関数
D : 定義域

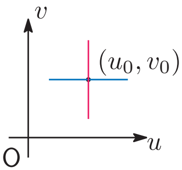
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \qquad (u,v) \in D \cdots (\star)$$

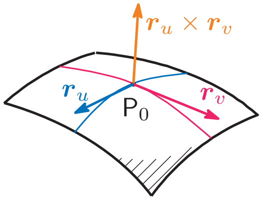
$\Longrightarrow$ 点 P の軌跡は連続な曲面.

ベクトル解析

曲面と面積分

接ベクトル





u 曲線：変数 u のみを動かしたときの点 P の軌跡
v 曲線：変数 v のみを動かしたときの点 P の軌跡

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_0, v_0)$ とするとき，$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$，$\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して $\vec{\mathbf{0}}$ でないならば

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$ は u 曲線の点 P_0 における接ベクトル
$\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ は v 曲線の点 P_0 における接ベクトル

ベクトル解析

曲面と面積分

接平面・法ベクトル

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$, $\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して 1 次独立ならば，点 P_0 における接平面の方向ベクトルとなる。

$$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$$

は接平面に垂直であるが，これと同方向のベクトルを S の点 P_0 における法ベクトルという.

以後の約束

以後，曲面は

$$S \ : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v) \qquad (u, v) \in D \cdots (\star)$$

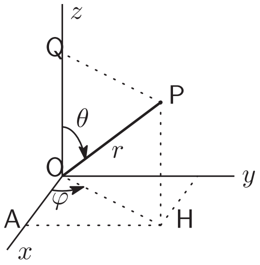
$\vec{\boldsymbol{r}}(u, v)$ は連続，偏微分可能, $\{\vec{\boldsymbol{r}}_u, \vec{\boldsymbol{r}}_v\}$ は 1 次独立

によりパラメータ表示されるものとする。

ベクトル解析

曲面と面積分

空間の極座標



$\mathrm{P}(x, y, z)$, $\mathrm{H}(x, y, 0)$, $\mathrm{A}(x, 0, 0)$, $\mathrm{Q}(0, 0, z)$

$\mathrm{OP} = r$, $\angle\mathrm{QOP} = \theta$, $\angle\mathrm{AOH} = \varphi$

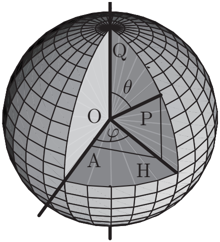
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

$r = a$ (一定) とすると P は球面を描くので

ベクトル解析

曲面と面積分

球面・球面座標



原点中心, 半径 a の球面 S は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$$

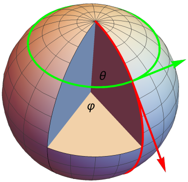
これを $= \vec{\boldsymbol{r}}(\theta, \varphi)$ とおく

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

によりパラメータ表示される。これを球面座標表示という.

ベクトル解析

曲面と面積分



$\boldsymbol{r}_\theta = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$
θ 曲線の接ベクトルで南向き．大きさは a.

$\boldsymbol{r}_\varphi = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)$
φ 曲線の接ベクトルで東向き，大きさは $a\sin\theta$.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi \\
&\quad = a\sin\theta(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta) \\
&\quad = a\sin\theta\,\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)
\end{aligned}
$$

ベクトル解析

曲面と面積分

スカラー場の面積分

平面領域上の 2 重積分の考え方を曲面の上に拡張したもの。
スカラー場 $\mathsf{P} \mapsto f(\mathsf{P})$ の曲面 S 上の面積分を

$$\iint_S f(\mathsf{P})\,dS = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{P}_k)\Delta S_k$$

で定める．ただし，

ΔS_k $(k = 1, \ldots, n)$: S を分割した小曲面 (およびその面積),

$\mathsf{P}_k \in \Delta S_k$,

$\lim$ は分割を細かくする極限

S が平面領域の時は 2 重積分，$f(P) \equiv 1$ のときは S の曲面積になる。

ベクトル解析

曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のスカラー場の面積分

曲面 S が

$$S \ : \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \quad (u,v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\vec{\boldsymbol{r}}(u,v))|\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v|\,dudv$$

$\{\Delta D_k\}$:D の長方形分割, $\{\Delta S_k\}$:対応する S の分割, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_k, v_k)$ とすると

$$\Delta S_k \fallingdotseq |\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_k,v_k) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_k,v_k)|m(D_k)$$

$$\text{左辺} = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{P}_k)|\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_k,v_k) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_k,v_k)|m(D_k) = \text{右辺}$$

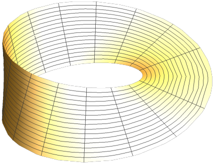
となるからである.

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面の向き付け

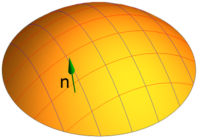
曲面に裏表を付けることを曲面の向き付けという。
S の各点 P に表方向の単位法線ベクトル $\vec{\boldsymbol{n}}(\mathrm{P})$ を対応させ, 正の向きの単位法線ベクトル とよぶ。
$\vec{\boldsymbol{n}}(\mathrm{P})$ が S の全域で連続に定義できるとき, 曲線は向き付け可能であるという。
各点 P で $\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v$ と $\vec{\boldsymbol{n}}$ が同じ向きとなるようなパラメータ (u, v) を正の向きのパラメータと呼ぶ.
今後は, 曲面はすべて向き付けられているものとし, パラメータはすべて正の向きのものとする.



ベクトル解析

曲面と面積分

ベクトル場の面積分の定義



S : 向き付けられた局面
$\vec{\boldsymbol{n}}$: 正の単位法ベクトル
$\vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P})$: ベクトル場
に対して $\vec{\boldsymbol{A}}$ の S 上面積分を

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \lim \sum_{k=0}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P}_k) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}(\mathsf{P}_k)\, \Delta S_k$$

で定める.
ΔS_k, P_k, lim : スカラー場の面積分の場合と同じ

スカラー場 $\vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}$ の面積分ということもできる。

ベクトル解析

曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のベクトル場の面積分

曲面 S が 正の向きのパラメータによって

$$S \ : \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \quad (u,v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_D \vec{A} \bullet (\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v)\, dudv$$

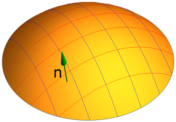
$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v}{|\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v|}, \quad dS = |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| dudv$$

と表されるからあきらかである.

ベクトル解析

曲面と面積分

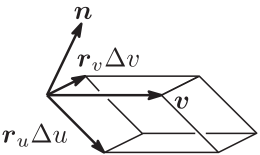
曲面を横切る流量



$\vec{v}$ を 流体の速度ベクトルとするとき

$$F = \iint_S \vec{v} \bullet \vec{n}\, dS$$

は単位時間に S を横切ってわき出す流体の総量



$$S : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

とすると S の微小部分は $\vec{r}_u du$, $\vec{r}_v dv$ で張られる平行四辺形で近似されるから，この部分を単位時間に横切る流体の総量は

$$\Delta V = \vec{v} \bullet \vec{n} = \vec{v} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dudv$$

ベクトル解析

曲面と面積分

[例:クーロン場の球面積分]

原点中心半径 a の球面 S を外向きに向き付ける.

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおく.

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}(x, y, z) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ で定める.

$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{n}$ だから

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \frac{1}{r^2}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{1}{a^2}\iint_S dS = \frac{1}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi$$

a によらないということが大事。

ベクトル解析

場の解析

スカラー場の勾配の定義

平面の (空間の) スカラー場 P $\mapsto f(P)$ は P の座標 (x, y) ((x, y, z)) を使うと 2 変数 (3 変数) 関数とみなせるので, x, y, (z) で偏微分ができる.

$$\mathrm{P}(x,y) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P})\right) \quad \text{平面の場合}$$

$$\mathrm{P}(x,y,z) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{P})\right) \quad \text{空間の場合}$$

で決まるベクトル場をスカラー場 f の勾配 (gradient) と呼び

$$\mathrm{grad}\, f, \quad \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}), \quad \mathrm{grad}\, f(x,y,z)$$

などの記号で表す.

ベクトル解析

場の解析

ハミルトン演算子による勾配の表示

形式的記号

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$$

をハミルトン (Hamilton) 演算子またはナブラ (nabla) と呼ぶ.
これらを用いると grad f は

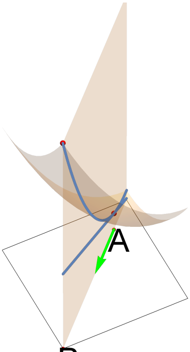
$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f\right) \quad = \nabla f$$

とかける。

ベクトル解析

復習：方向微分

復習：2 変数関数の方向微分係数の定義



$z=f(x,y)$：2 変数関数
A(a,b)：xy 平面の定点.
$\vec{u}$：xy 平面の大きさ 1 のベクトル.
動点 P(x,y) を A から $\vec{u}$ 方向に動かすと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{u}, \quad s \text{ は実数のパラメータ}$$

と表される.

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(\mathrm{P})-f(\mathrm{A})}{s}$$

が存在するとき $f(x,y)$ の点 A(a,b) における $\vec{u}$ 方向微分係数と呼ぶ. (ただし, f(P), f(A) はそれぞれ $f(x,y)$, $f(a,b)$ を意味する.)

ベクトル解析

復習：方向微分

復習：2 変数関数の方向微分可能性・方向微分係数の表示

$f(x,y)$ は連続微分可能とする。

(i) 大きさ 1 の任意のベクトル $\vec{\boldsymbol{u}}$ に対して，点 $\mathsf{A}(a,b)$ における $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向微分係数は存在する。

(ii) $\vec{\boldsymbol{u}}$ の成分表示を $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_1, u_2)$ とすると

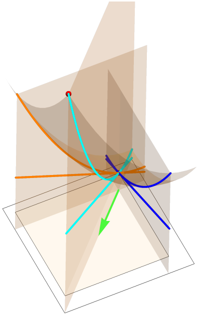
$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathsf{P}) - f(\mathsf{A})}{s} = u_1 f_x(a,b) + u_2 f_y(a,b) = \vec{\boldsymbol{u}} \bullet \operatorname{grad} f(a,b)$$

である.

このことは 3 変数関数 $f(x,y,z)$，空間のスカラー場 $f(\mathsf{P})$ についても成り立つ。

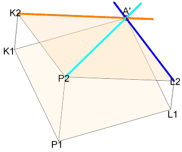
ベクトル解析

復習：方向微分



[考え方]　曲面 $z = f(x, y)$ に対して，
x 方向切り口, x 方向接線,
y 方向切り口, y 方向接線,
$\vec{u}$ 方向切り口, $\vec{u}$ 方向接線
を作る。$f(x, y)$ が連続微分可能であるとき, 3 接線は同一平面上にある。(これが接平面である。)

A$'(a, b, f(a, b))$,　P$_1(x, y, f(a, b))$ とおくと
$\overrightarrow{\mathrm{A'P_1}} = s\vec{u}$, だから $(x-a, y-b, 0) = (su_1, su_2, 0)$.



A$'$K$_2$ の傾き $= f_x(a, b)$　だから

$$\mathrm{K_1K_2} = f_x(a, b)(x-a) = f_x(a, b)su_1$$

A$'$L$_2$ の傾き $= f_y(a, b)$　だから

$$\mathrm{L_1L_2} = f_y(a, b)(y-b) = f_y(a, b)su_2$$

ベクトル解析

復習：方向微分

$\mathsf{A}'\mathsf{K}_2\mathsf{P}_2\mathsf{L}_2$ は平面であるから

$$\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathsf{K}_1\mathsf{K}_2 + \mathsf{L}_1\mathsf{L}_2 = f_x(a,b)su_1 + f_y(a,b)su_2$$

$f(x)$ が連続微分可能であることにより曲面 $z = f(x,y)$ は接平面で近似できるから

$$\frac{f(\mathsf{P}) - f(\mathsf{A})}{s} \fallingdotseq \frac{\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2}{s} = u_1 f_x(a,b) + u_2 f_y(a,b)$$

極限 $s \to 0$ をとれば $=$ となる。

ベクトル解析

場の解析

スカラー場の方向微分

スカラー場 f の $\vec{u}$ 方向微分係数を

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{P}_0)}{s}$$

で定める．ただし

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$：単位ベクトル.

s：実数のパラメータ

$\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathrm{P}(x, y, z)$ は $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = s\vec{u}$ をみたす.

ベクトル解析

場の解析

スカラー場の方向微分と勾配

(i)　スカラー場 $f(P)$ が $(x, y, z$ の関数とみて$)$ 偏微分可能，かつ各偏導関数が連続であるとき，ベクトル $\vec{\boldsymbol{u}}$ 方向の方向微分は存在して

$$\vec{\boldsymbol{u}} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \cdots (\star)$$

に等しい．

(ii)　grad $f(\mathrm{P}_0)$ は，$\vec{\boldsymbol{u}}$ を $|\vec{\boldsymbol{u}}| = 1$ を満たしながら変化させたとき，

① 向きは f の P_0 における方向微分係数 $(\star)$ が最大になる $\vec{\boldsymbol{u}}$ の向き

② 大きさはその時の方向微分係数の値

であるようなベクトルである。

このことは grad f が座標系の取り方に依存しないことも示している．

ベクトル解析

場の解析

[確かめ] (i) は 2 変数 (3 変数) 関数の場合と全く同じ。(ii) は

$$\vec{u} \bullet \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) = |\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)| \cos\theta \quad (\theta \text{は } \vec{u} \text{ と } \mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0) \text{ のなす角})$$

だから $(\star)$ は $\vec{u}$ と $\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)$ が同じ向きのとき最大値 $|\mathrm{grad}\, f(\mathrm{P}_0)|$ をとるから明らか.

ベクトル解析

場の解析

復習：2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 連続微分可能

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "z_x"] & \\
t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\
 & y \arrow[ur, "z_y"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

だから同様に (P の座標を (x, y, z) として)

ベクトル場 $f(\mathrm{P})$ が x, y, z で偏微分可能かつ偏導関数が連続,

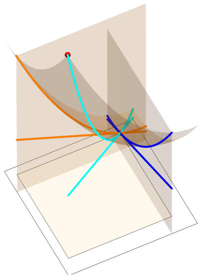
$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$: t で微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $f(x(t), y(t), z(t))$ も微分可能で

$$f(P)_t = x_t f(P)_x + y_t f(P)_y + z_t f(P)_z \quad \cdots (\star\star)$$

ベクトル解析

場の解析



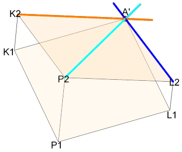
[考え方]　t の増分 Δt に対応する x の増分を Δx, y の増分を Δy, z の増分を $f(\mathrm{P})-f(\mathrm{A})=\Delta z$ とする。$\mathrm{A}'=(a,b,f(a,b))$, $\mathrm{A'K_2}$ は x 方向接線, $\mathrm{A'L_2}$ は y 方向接線とする。

$\mathrm{A'K_2}$ の傾き $=f_x(a,b)$ だから　$\mathrm{K_1K_2}=f_x(a,b)\Delta x$

$\mathrm{A'L_2}$ の傾き $=f_y(a,b)$ だから　$\mathrm{L_1L_2}=f_y(a,b)\Delta y$

$\mathrm{A'K_2P_2L_2}$ は平面であるから

$$\mathrm{P_1P_2}=\mathrm{K_1K_2}+\mathrm{L_1L_2}=f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y$$



$f(x)$ が連続微分可能であることにより曲面 $z=f(x,y)$ は接平面で近似できるから

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(\mathrm{P})-f(\mathrm{A})\\ &\fallingdotseq \mathrm{P_1P_2}=f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y\end{aligned}$$

ベクトル解析

場の解析

両辺 Δt で割って

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \fallingdotseq f_x(a,b)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(a,b)\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ とすれば

$$\frac{dz}{dt} = f_x(a,b)\frac{dx}{dt} + f_y(a,b)\frac{dy}{dt}$$

最後に (a,b) を (x,y) に置き換える。

ベクトル解析

場の解析

スカラー場の等高線・等位面

連続なスカラー場 f と定数 c に対して，集合 $\{\mathsf{P}; f(\mathsf{P}) = c\}$ は，一般に平面の場合曲線，空間の場合曲面となる．この曲線 (曲面) をスカラー場 f の等高線 (等位面) という。

等高線の接線 (等位面の接平面) と勾配 $\mathrm{grad} f$ は直交する。

[考え方] A を等位面 S 上の点とし，S 上の A をとおる曲線 C のパラメータ表示を $\overrightarrow{\mathsf{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$ とする。

$f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \equiv 0$ だから $\dfrac{d}{dt} f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) = 0.$ 一方合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt} f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) = \mathrm{grad} f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{r}}(t)$$

だから C の各点での接線はその点での勾配と直交する。これは接平面と勾配が直交することを意味する。

ベクトル解析

場の解析

保存場とスカラーポテンシャル

$\vec{A}$：ベクトル場，　f：スカラー場　が

$$\vec{A} = -\mathrm{grad}\, f$$

をみたすとき，

$\vec{A}$ は保存場である

f は $\vec{A}$ のスカラーポテンシャルである

という。

ベクトル解析

場の解析

例　クーロン場のポテンシャル

スカラー場

$$f(x,y,z) = \frac{1}{r}, \quad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

はベクトル場

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{(x,y,z)}{r^3}$$

のスカラーポテンシャルである。

ベクトル解析

場の解析

[確かめ]

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\left(\frac{1}{r}\right)_x, \left(\frac{1}{r}\right)_y, \left(\frac{1}{r}\right)_z \right)$$

であるが $r_x = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$

$\left(\dfrac{1}{r}\right)_x = \left(\dfrac{1}{r}\right)_r r_x = -\dfrac{r_x}{r^2} = -\dfrac{x}{r^3}$ 同様に $\left(\dfrac{1}{r}\right)_y = -\dfrac{y}{r^3}$, $\left(\dfrac{1}{r}\right)_z = -\dfrac{z}{r^3}$,

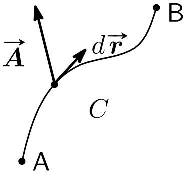
だから

$$-\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{(x, y, z)}{r^3} = \vec{\boldsymbol{A}}$$

ベクトル解析

場の解析

保存場の線積分



$\vec{A} = -\mathrm{grad}\, f$,

C : 点 A から点 B に向き付けられた曲線

$$\Rightarrow \int_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = f(A) - f(B)$$

(積分は途中経路によらない！！)

[確かめ]　$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}(t),\ a \leqq t \leqq b$, 正のパラメータ　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{r}(a),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{r}(b)$

$$\text{左辺} = \int_a^b \vec{A}(\vec{r}(t)) \bullet \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\, dt = -\int_a^b \mathrm{grad} f(\vec{r}(t)) \bullet \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$= -\int_a^b \left(f(\vec{r})_x x'(t) + f(\vec{r})_y y'(t) + f(\vec{r})_z z'(t) \right) dt$$

$$= -\int_a^b \frac{df(\vec{r}(t))}{dt}\, dt = -\Big[f(\vec{r}(t)) \Big]_a^b = \text{右辺}$$

$(F(P)$ を $F(\vec{r})$ などと書いた$)$

ベクトル解析
場の解析

ベクトル場の発散

ベクトル場 $\vec{\boldsymbol{A}}(P) = (A_1(x,y,z), A_2(x,y,z), A_3(x,y,z))$ に対して

スカラー場 $\dfrac{\partial A_1}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial A_2}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial A_3}{\partial z}(x,y,z)$

を $\vec{\boldsymbol{A}}$ の発散 (divergence) という。

記号 div$\vec{\boldsymbol{A}}$, $\nabla \bullet \vec{\boldsymbol{A}}, \cdots$ であらわす。

ベクトル解析

場の解析

[例：クーロン場の発散]

$$\vec{A}(P) = \frac{(x, y, z)}{r^3} \text{ のとき}$$

$$\mathrm{div}\vec{A}(P) = \begin{cases} 0, & (\mathrm{P} \neq \mathrm{O}) \\ \text{定義できない}, & (\mathrm{P} = \mathrm{O}) \end{cases}$$

ベクトル解析

場の解析

[div$\vec{\boldsymbol{A}}$ の本質：点 P での湧き出し率]
点 P を含み, 座標軸に平行な辺をもつような立方体 E をとるとき,

$$\frac{1}{V(E)}\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS \longrightarrow \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P)$$

$\longrightarrow$ は E を 1 点 P に縮めていったときの極限,
S は E の表面に外向きに向きを付けたもの,
$\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトル,
$V(E)$ は E の体積.

ベクトル解析

場の解析

ガウスの発散定理

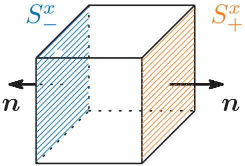
G を空間の有界閉領域, S を G の表面に外向きに向き付けたもの, $\boldsymbol{n}$ を S の外向き単位法線ベクトルとし $\boldsymbol{A} = (x, y, z)$ を連続微分可能なベクトル場とする．このとき

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_G \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}\, dxdydz$$

が成り立つ.

ベクトル解析

場の解析



G が直方体

$$E = \{(x, y, z)\,;\, x_- \leqq x \leqq x_+,\ y_- \leqq y \leqq y_+,\ z_- \leqq z \leqq z_+\,\}$$

の場合に述べる。また同様に

$$S_\pm^x = \{(x, y, z)\,;\, x = x_\pm,\ y_- \leqq y \leqq y_+,\ z_- \leqq z \leqq z_+\,\}$$

などとすると E の境界 S は $S_+^x,\ S_-^x,\ S_+^y,\ S_-^y,\ S_+^z,\ S_-^z$ に分けられる。

$$S_-^x \text{上では} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = (A_1, A_2, A_3) \bullet (-1, 0, 0) = -A_1(x_-, y, z)$$
$$S_+^x \text{上では} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = (A_1, A_2, A_3) \bullet (1, 0, 0) = A_1(x_+, y, z)$$

ベクトル解析

場の解析

だから

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_-^x \cup S_+^x} \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{n}\, dS \\
&= \int_{z_-}^{z_+} \int_{y_-}^{y_+} \left(A_1(x_+, y, z) - A_1(x_-, y, z)\right)\, dydz \\
&= \int_{z_-}^{z_+} \int_{y_-}^{y_+} \left(\int_{x_-}^{x_+} \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, y, z)\, dx \right)\, dydz = \iiint_E \frac{\partial A_1}{\partial x}\, dxdydz
\end{aligned}$$

となる. y, z についても同様だから

$$\iint_S \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_E \mathrm{div}\boldsymbol{A}(x, y, z)\, dxdydz \tag{1}$$