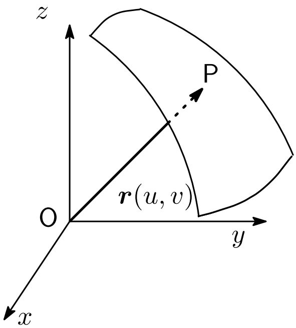
本日やること

- 曲面と面積分

ベクトル解析
曲面と面積分

曲面のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(u,v)$：連続な 2 変数ベクトル値関数
D ：定義域

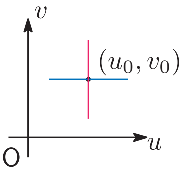
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \qquad (u,v) \in D \cdots (\star)$$

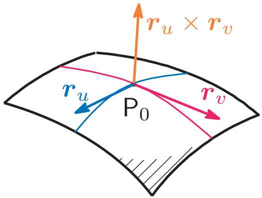
$\Longrightarrow$ 点 P の軌跡は連続な曲面.

ベクトル解析

曲面と面積分

接ベクトル





u 曲線：変数 u のみを動かしたときの点 P の軌跡

v 曲線：変数 v のみを動かしたときの点 P の軌跡

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_0, v_0)$ とするとき，$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$，$\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して $\vec{\boldsymbol{0}}$ でないならば

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$ は u 曲線の点 P_0 における接ベクトル

$\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ は v 曲線の点 P_0 における接ベクトル

ベクトル解析

曲面と面積分

接平面・ 法ベクトル

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$, $\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して 1 次独立ならば, 点 P_0 における接平面の方向ベクトルとなる。

$$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$$

は接平面に垂直であるが, これと同方向のベクトルを S の点 P_0 における法ベクトルという.

以後の約束

以後, 曲面は

$$S \ : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v) \qquad (u, v) \in D \cdots (\star)$$

$\vec{\boldsymbol{r}}(u, v)$ は連続, 偏微分可能, $\{\vec{\boldsymbol{r}}_u, \vec{\boldsymbol{r}}_v\}$ は 1 次独立

によりパラメータ表示されるものとする。

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面積・面積要素

D が面積確定な有界閉領域のとき,

$$S \text{ の面積} = \iint_D |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| du dv$$

と定める.

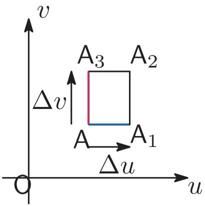
$$dS = |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| du dv$$

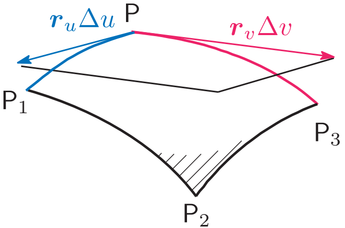
を面積要素と呼ぶ.

ベクトル解析

曲面と面積分

[考え方] u, v が小さい長方形領域 $\mathrm{AA_1A_2A_3}$ を動くとき, 対応する曲面の小部分 $\mathrm{PP_1P_2P_3}$ の面積 ΔS は





$$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}} = \vec{r}(u+\Delta u, v) - \vec{r}(u, v) \fallingdotseq \vec{r}_u(u, v)\Delta u,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PP_3}} = \vec{r}(u, v+\Delta v) - \vec{r}(u, v) \fallingdotseq \vec{r}_v(u, v)\Delta v$$

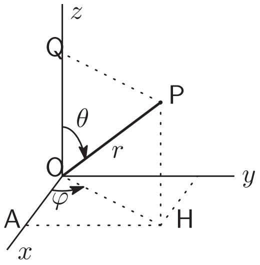
$$\Delta S \fallingdotseq |\vec{r}_u(u, v)\Delta u \times \vec{r}_v(u, v)\Delta v| = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|\Delta u\Delta v$$

のように近似されるから.

ベクトル解析

曲面と面積分

空間の極座標



P(x, y, z), H$(x, y, 0)$, A$(x, 0, 0)$, Q$(0, 0, z)$

OP $= r$, $\angle$QOP $= \theta$, $\angle$AOH $= \varphi$

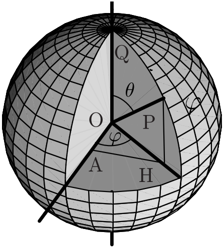
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

$r = a$ (一定) とすると P は球面を描くので

ベクトル解析

曲面と面積分

球面・球面座標



原点中心, 半径 a の球面 S は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$$

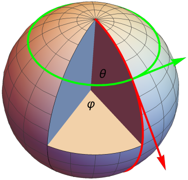
$$これを = \vec{\boldsymbol{r}}(\theta,\varphi) とおく$$

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

によりパラメータ表示される。これを球面座標表示という.

ベクトル解析

曲面と面積分



$\boldsymbol{r}_\theta = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$
θ 曲線の接ベクトルで南向き．大きさは a.

$\boldsymbol{r}_\varphi = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)$
φ 曲線の接ベクトルで東向き，大きさは $a\sin\theta$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi &\\ &= a\sin\theta(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)\\ &= a\sin\theta\,\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)\end{aligned}$$

ベクトル解析
曲面と面積分

スカラー場の面積分

平面領域上の 2 重積分の考え方を曲面の上に拡張したもの。
スカラー場 $\mathsf{P} \mapsto f(\mathsf{P})$ の曲面 S 上の面積分を

$$\iint_S f(\mathsf{P})\, dS = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{P}_k) \varDelta S_k$$

で定める．ただし，

$\varDelta S_k \ (k = 1, \ldots, n)$: S を分割した小曲面 (およびその面積),

$\mathsf{P}_k \in \varDelta S_k$,

$\lim$ は分割を細かくする極限

S が平面領域の時は 2 重積分，$f(P) \equiv 1$ のときは S の曲面積になる。

ベクトル解析

曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のスカラー場の面積分

曲面 S が

$$S \ : \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \quad (u,v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\vec{\boldsymbol{r}}(u,v))|\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v|\,dudv$$

$\{\Delta D_k\}$:D の長方形分割, $\{\Delta S_k\}$:対応する S の分割, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_k, v_k)$ とすると

$$\Delta S_k \fallingdotseq |\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_k,v_k) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_k,v_k)| m(D_k)$$

$$左辺 = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{P}_k)|\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_k,v_k) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_k,v_k)| m(D_k) = 右辺$$

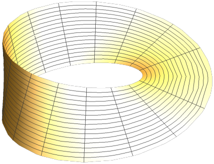
となるからである.

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面の向き付け

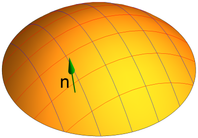
曲面に裏表を付けることを曲面の向き付けという。
S の各点 P に表方向の単位法線ベクトル $\vec{n}(\mathrm{P})$ を対応させ, 正の向きの単位法線ベクトル とよぶ。
$\vec{n}(\mathrm{P})$ が S の全域で連続に定義できるとき, 曲線は向き付け可能であるという。
各点 P で $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ と $\vec{n}$ が同じ向きとなるようなパラメータ (u, v) を正の向きのパラメータと呼ぶ.
今後は, 曲面はすべて向き付けられているものとし, パラメータはすべて正の向きのものとする.



ベクトル解析

曲面と面積分

ベクトル場の面積分の定義



S : 向き付けられた局面
$\vec{\boldsymbol{n}}$: 正の単位法ベクトル
$\vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P})$: ベクトル場
に対して $\vec{\boldsymbol{A}}$ の S 上面積分を

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \lim \sum_{k=0}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P}_k) \bullet \vec{\boldsymbol{n}}(\mathsf{P}_k)\, \Delta S_k$$

で定める.
ΔS_k, P_k, $\lim$: スカラー場の面積分の場合と同じ

スカラー場 $\vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}$ の面積分ということもできる。

ベクトル解析

曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のベクトル場の面積分

曲面 S が 正の向きのパラメータによって

$$S \ : \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \quad (u,v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_D \vec{A} \bullet (\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v)\, dudv$$

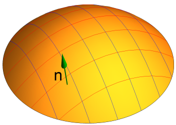
$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v}{|\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v|}, \quad dS = |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| dudv$$

と表されるからあきらかである.

ベクトル解析

曲面と面積分

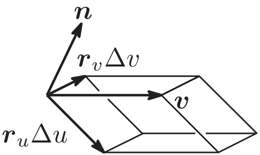
曲面を横切る流量



$\vec{v}$ を 流体の速度ベクトル とするとき

$$F = \iint_S \vec{v} \bullet \vec{n}\, dS$$

は単位時間に S を横切ってわき出す流体の総量



$$S : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

とすると S の微小部分は $\vec{r}_u du$, $\vec{r}_v dv$ で張られる平行四辺形で近似されるから，この部分を単位時間に横切る流体の総量は

$$\Delta V = \vec{v} \bullet \vec{n} = \vec{v} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dudv$$

ベクトル解析
曲面と面積分

[例:クーロン場の球面積分]

原点中心半径 a の球面 S を外向きに向き付ける.

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおく.

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}(x, y, z) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ で定める.

$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{n}$ だから

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \frac{1}{r^2} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{1}{a^2} \iint_S dS = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi$$

a によらないということが大事。