本日やること

1. ベクトル解析
   - ベクトル関数の微積分
   - 曲線と線積分

ベクトル値関数

復習：ベクトル値関数の定義

復習：ベクトル値関数の定義

[1 変数ベクトル (値) 関数]： $t \in \mathbb{R}$ に ベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ を対応させる関数 $t \mapsto \boldsymbol{A}(t)$

運動する点の位置，速度，加速度や，その軌跡である曲線を表すために使われる．

[2 変数ベクトル (値) 関数]：2 個の実数の組 (t, s) にベクトル $\boldsymbol{A}(t, s)$ を対応させる写像 $(t_1, t_2) \mapsto \boldsymbol{A}(t_1, t_2)$

これは曲面を表わすために使われる．

ベクトル値関数

復習：ベクトル値関数の成分表示

復習：ベクトル値関数の成分表示

[1 変数ベクトル関数]

平面の場合： $\boldsymbol{A}(t) = (x(t), y(t))$

空間の場合： $\boldsymbol{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

[2 変数ベクトル関数]

平面の場合： $\boldsymbol{A}(t, s) = (x(t, s), y(t, s))$

空間の場合： $\boldsymbol{A}(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$

ベクトル解析

復習：1 変数ベクトル関数の微積分

復習：1 変数ベクトル関数の微分係数の定義・成分表示

$\overrightarrow{\boldsymbol{A}(t)}$ が t_0 で微分可能 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{A}}(t_0 + \Delta t) - \vec{\boldsymbol{A}}(t_0)}{\Delta t} \cdots (\star)$ が存在

$(\star)$ を t_0 における微分係数ベクトルといい

記号：$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt}(t_0)$,　$\dot{\vec{\boldsymbol{A}}}(t_0), \cdots$

で表す

$\vec{\boldsymbol{A}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$\vec{\boldsymbol{A}}(t)$ が t_0 で微分可能 $\Longleftrightarrow$ $x(t), y(t), z(t)$ が t_0 で微分可能

$\dot{\vec{\boldsymbol{A}}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$　成分ごとに微分すればよい。

ベクトル解析

復習：1 変数ベクトル関数の微積分

復習：1 変数ベクトル関数の導関数ベクトルの定義・成分表示

$t \mapsto \dot{\vec{\boldsymbol{A}}}(t)$: $\vec{\boldsymbol{A}}(t)$ の導関数ベクトル

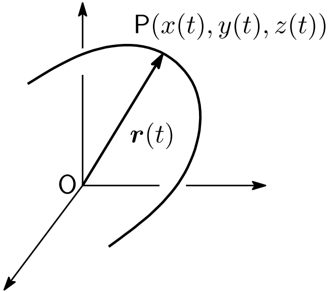
$\vec{\boldsymbol{A}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$$\dot{\vec{\boldsymbol{A}}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

ベクトル解析
曲線と線積分

曲線のパラメータ表示

曲線のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(t)$：連続な 1 変数ベクトル値関数

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \qquad (\star)$$

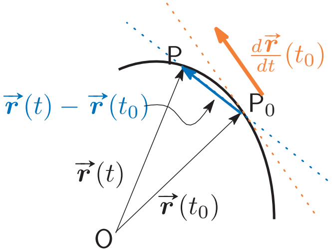
を満たす点 P の軌跡 C は連続な曲線となる.

$(\star)$ を曲線 C のパラメータ表示といい, t をパラメータという。

ベクトル解析

曲線と線積分

接ベクトル



$t=t_0$ のとき P_0 を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\vec{r}(t_0)$ で定める。

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\neq\mathbf{0}$ であるとき

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ (の 0 でない定数倍) は, P_0 における C の接ベクトルとなる。

[考え方] $t\to t_0$ とすると $\mathrm{P}\to\mathrm{P}_0$ となるので直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ は曲線の接線に近づくと考えられるが

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}}{t-t_0}$$

だから $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ は接線の方向ベクトルとなる。

ベクトル解析

曲線と線積分

以後, 曲線 C は

パラメータ表示 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$

を持ち, $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ は連続微分可能で,

すべての t に対して $|\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}(t)| > 0$

を満たすものとする。

ベクトル解析

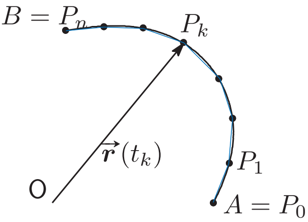
曲線と線積分

曲線の長さ

曲線 C の分点を

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \cdots, \mathsf{P}_n = \mathsf{B}$$

とするとき C の長さ L を



$$L = \lim \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k}$$

と定める. $\lim$ は分点の間隔を細かくする極限。

ベクトル解析

曲線と線積分

曲線の長さのパラメータによる計算

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

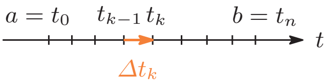
である．成分表示 $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を使うと

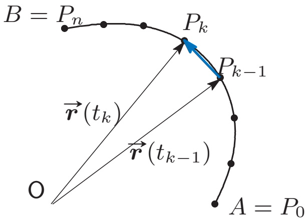
$$= \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[確かめ]





$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{r}(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left| \frac{\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \right| \Delta t_k$$

$$L \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \right| \Delta t_k \to \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

弧長パラメータの定義

$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t), \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_0)$ のとき

$$s = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\tau} \right| d\tau = \begin{cases} \text{曲線 AP の長さ} & (t > t_0 \text{のとき}) \\ -\text{曲線 AP の長さ} & (t < t_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

で決まる s を弧長パラメータという。

$\dfrac{ds}{dt} = \left| \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right|$ だから $ds = \left| \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$ (線要素とよぶ)

$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}$ だから $d\vec{\boldsymbol{r}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}\, dt$

ベクトル解析
曲線と線積分

線積分

[スカラー場]

$$\begin{array}{ccc} 点 & & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & f(\mathrm{P}) \end{array}$$

電位, 電荷密度などで現れる。

[ベクトル場]

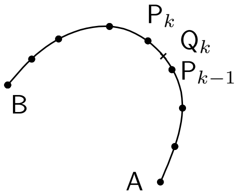
$$\begin{array}{ccc} 点 & & ベクトル \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{P}) \end{array}$$

電磁場, 流体の速度場などで現れる。

ベクトル解析

曲線と線積分

スカラー場の線積分の定義



曲線 C 上の, スカラー場 P $\mapsto f(\mathrm{P})$ の線積分を

$$\int_C f(\mathrm{P})\,ds = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{Q}_k)\,\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$$

で定める。ただし

A $=$ P$_0$, P$_1, \ldots,$ P$_n$ $=$ B : C の分点,
Q$_k$: C の P$_{k-1}$ から P$_k$ までの部分に含まれる点
$\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$: P$_{k-1}$ から P$_k$ までの弧長.
$\lim$ は分割を細かくする極限

スカラー場 の線積分は, 区間 $[a, b]$ 上の関数の定積分を曲線上に拡張したもの。
(ただし $a < b$ とする。)

ベクトル解析

曲線と線積分

パラメータ表示によるスカラー場の線積分の計算

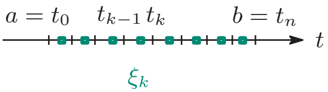
$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \ a \leqq t \leqq b,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$$

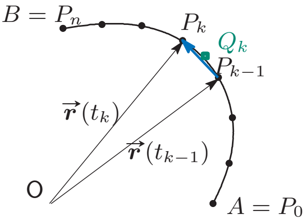
$$\Rightarrow \quad \int_C f(\mathrm{P})\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[確かめ]





$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_k), \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

とすると $f(P) = f(\vec{\boldsymbol{r}}(t))$ と書いて

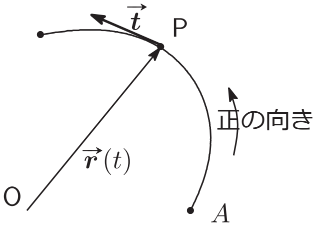
$$\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \fallingdotseq |\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left| \frac{\vec{\boldsymbol{r}}(t_k) - \vec{\boldsymbol{r}}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k) \right| \Delta t_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k) \right| \Delta t_k \to \int_a^b f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[曲線の向き付け]



曲線
$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$
に向きを付ける。

この向きと, t が増加するとき P の動く向きが一致するとき, t を正のパラメータという。

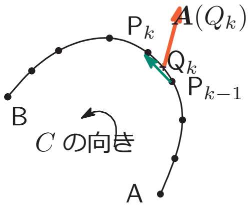
$$\vec{\boldsymbol{t}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \div \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\right|$$

を正の単位接ベクトルという。以後 t は正のパラメータとする。

ベクトル解析

曲線と線積分

ベクトル場の線積分の定義



曲線 C 上の, ベクトル場 $\mathsf{P} \mapsto \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P})$ の線積分を

$$\int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k} \quad \cdots (\star)$$

で定める。(記号はスカラー場の場合と同じ)

ベクトル解析

曲線と線積分

パラメータ表示によるベクトル場の線積分の計算

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leqq t \leqq b,\ \text{正のパラメータ}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$$

$$\Rightarrow \quad \int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)}) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\,dt = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)}) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\,ds$$

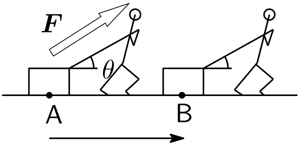
[確かめ]　前と同じ記号で

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}_k}{\Delta t_k}\Delta t_k \fallingdotseq \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\Delta t_k,\quad \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{Q}_k) = \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\xi_k)})$$

$$(\star)\ \text{の右辺} \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\xi_k)}) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\Delta t_k \to \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt$$

ベクトル解析
曲線と線積分

[力の場での仕事]　空間の点 P に対して力 $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ が決まるとき, $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ を力の場という. 力の場 $\vec{\boldsymbol{F}}$ の中で曲線 C に沿って物体を移動させるとき, $\vec{\boldsymbol{F}}$ のする仕事 W を定める.



$\vec{\boldsymbol{F}}$: 定ベクトル. C : 線分 AB (A から B へ向き付ける) の場合。
$\vec{\boldsymbol{F}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角を θ とするとき

$$W = |\vec{\boldsymbol{F}}|\,\mathrm{AB}\,\cos\theta = \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

一般の場合。C を折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_n$ で近似して各線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ 上では $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ は 定ベクトル $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{Q}_k)$ で近似して, W を

.

$$W = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}}$$

と定める.