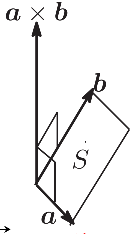
本日やること

1. 復習：ベクトル
   - ベクトルの外積
2. ベクトル関数
   - ベクトル関数の定義・極限・連続性
3. ベクトル解析
   - ベクトル関数の微積分
   - 曲線と線積分

ベクトル

ベクトルの外積

空間のベクトルの外積の定義



$\vec{a}$, $\vec{b}$: 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$

(ii) $|\vec{c}| = \vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 ($= S$ とおく)

(iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ は右手系

を満たすベクトル $\vec{c}$ がただ一つある。この $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の外積といい

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

であらわす。

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が 1 次従属ならば $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ と定める。

ベクトル
ベクトルの外積

外積の成分表示

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

ベクトル
ベクトルの外積

[確かめ]
$\vec{\boldsymbol{c}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ とおくと $\vec{\boldsymbol{c}}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことを示す。

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{c}} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

だから $\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{c}}$. 同様に $\vec{\boldsymbol{b}} \perp \vec{\boldsymbol{c}}$.

$$|\vec{\boldsymbol{c}}|^2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \ \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}} \text{ の張る平行六面体の体積} = |\vec{\boldsymbol{c}}|S$$

だから $|\vec{\boldsymbol{c}}| = S$ かつ $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}\}$ は右手系.
以上で $\vec{\boldsymbol{c}}$ は (i), (ii), (iii) を満たすことが分かった。
(i), (ii), (iii) を満たすベクトルはひとつしかないから $\vec{\boldsymbol{c}}$ は外積である。

ベクトル値関数

ベクトル値関数の定義

ベクトル値関数の定義

[1 変数ベクトル (値) 関数]：$t \in \mathbb{R}$ に ベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ を対応させる関数 $t \mapsto \boldsymbol{A}(t)$

運動する点の位置，速度，加速度や，その軌跡である曲線を表すために使われる．

[2 変数ベクトル (値) 関数]：2 個の実数の組 (t, s) にベクトル $\boldsymbol{A}(t, s)$ を対応させる写像 $(t_1, t_2) \mapsto \boldsymbol{A}(t_1, t_2)$

これは曲面を表わすために使われる．

ベクトル値関数

ベクトル値関数の成分表示

ベクトル値関数の成分表示

[1 変数ベクトル関数]

平面の場合： $\boldsymbol{A}(t) = (x(t), y(t))$

空間の場合： $\boldsymbol{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

[2 変数ベクトル関数]

平面の場合： $\boldsymbol{A}(t,s) = (x(t,s), y(t,s))$

空間の場合： $\boldsymbol{A}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$

ベクトル値関数

ベクトル値関数の収束・極限

1変数ベクトル値関数の収束・極限

$t \to t_0$ のとき $\boldsymbol{A}(t)$ が極限 $\boldsymbol{A}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ に 収束する というのは

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}_0| = 0$$

となることであると定め,

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0 \quad \text{または} \quad \boldsymbol{A}(t) \to \boldsymbol{A}_0 \ (t \to t_0)$$

で表す．実はこれは $\boldsymbol{A}(t)$ の各成分関数が $\boldsymbol{A}_0$ の対応する成分に収束することと同じである．つまり

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0 \iff \begin{cases} \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \\ \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \\ \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0 \end{cases}$$

ベクトル値関数

ベクトル値関数の微分係数・導関数

$\boldsymbol{A}(t)$ が 点 t_0 で微分可能である というのは極限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{A}(t_0)}{\Delta t}$$

が存在することと定める．またその極限を点 t_0 における $\boldsymbol{A}(t)$ の微分係数 といい $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{A}}(t_0)$ で表す．

各点で微分可能であるとき ベクトル値関数 $t \mapsto \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)$ が考えられるが，これを $\boldsymbol{A}(t)$ の 導関数 という．

極限と同様にベクトル値関数が微分可能であることと各成分関数が微分可能であることとは同じことであり

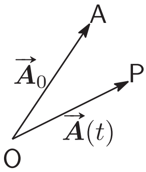
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t) \right)$$

となる．高階導関数についても同様に定める．

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の極限の定義



$\displaystyle\lim_{t\to t_0} \mathrm{AP} = 0$ のとき $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \vec{\boldsymbol{A}}(t) = \vec{\boldsymbol{A}}_0$ と定める。

実は $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ として

$\displaystyle\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$，$\displaystyle\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$，$\displaystyle\lim_{t\to t_0} z(t) = z_0$

と同値。

1 変数ベクトル関数の連続性の定義

$\vec{\boldsymbol{A}}(t)$ が点 t_0 で連続 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \vec{\boldsymbol{A}}(t) = \vec{\boldsymbol{A}}(t_0)$

$\vec{\boldsymbol{A}}(t)$ が区間 I で連続 $\Leftrightarrow$ I の各点で連続

実は各成分関数 $x(t), y(t), z(t)$ が連続であることと同値。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の微分係数の定義

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}(t)} \text{ が } t_0 \text{ で微分可能} \iff \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{A}}(t_0 + \Delta t) - \vec{\boldsymbol{A}}(t_0)}{\Delta t} \cdots (\star) \text{ が存在}$$

$(\star)$ を t_0 における微分係数ベクトルといい

記号：$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt}(t_0),\quad \dot{\vec{\boldsymbol{A}}}(t_0), \cdots$

で表す

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

微分係数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$\vec{A}(t)$ が t_0 で微分可能 $\iff$ $x(t), y(t), z(t)$ が t_0 で微分可能

$\dot{\vec{A}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 成分ごとに微分すればよい。

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\vec{A}(t_0+\Delta t) - \vec{A}(t_o)}{\Delta t} \\
&= \frac{(x(t_0+\Delta t) - x(t_o), y(t_o+\Delta t) - y(t_o), z(t_o+\Delta t) - z(t_o))}{\Delta t} \\
&= \left(\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_o)}{\Delta t}, \frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_o)}{\Delta t}, \frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_o)}{\Delta t} \right) \\
&\to (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))
\end{aligned}
$$

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の導関数ベクトルの定義

$t \mapsto \dot{\vec{A}}(t)$: $\vec{A}(t)$ の導関数ベクトル

導関数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$$\dot{\vec{A}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

ベクトル解析

2 変数ベクトル関数の微積分

[2 変数ベクトル関数]
2 変数ベクトル値関数 $\vec{A}(u, v)$ に対しても 2 変数の実数値関数と同様に極限, 連続性, 偏導関数を定める.

[成分表示]

$$\vec{A}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

極限・連続性・偏微分可能性は 1 変数の時と同様に定める。
[偏導関数]

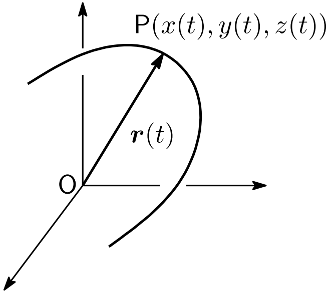
$$\frac{\partial}{\partial u}\vec{A} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \ \frac{\partial}{\partial v}\vec{A} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

記号 $\vec{A}_u$, $\vec{A}_v$ を用いることもある.

ベクトル解析
曲線と線積分

曲線のパラメータ表示

曲線のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(t)$：連続な 1 変数ベクトル値関数

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \qquad (\star)$$

を満たす点 P の軌跡 C は連続な曲線となる.

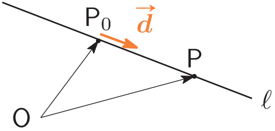
$(\star)$ を曲線 C のパラメータ表示といい, t をパラメータという。

ベクトル解析
曲線と線積分

[例] 点 P_0 を通り, ベクトル $\vec{d} \neq \mathbf{0}$ に平行な直線 ℓ のパラメータ表示は

$$\ell : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + t\vec{d} \quad (t \in \mathbb{R})$$

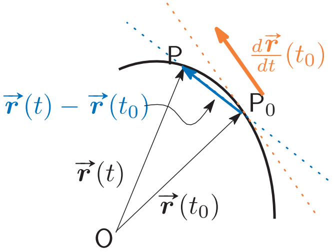
$\vec{d}$ を方向ベクトルという



ベクトル解析

曲線と線積分

接ベクトル



$\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \neq \mathbf{0}$ であるとき

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ (の 0 でない定数倍) は, P_0 における C の接ベクトルとなる。

[考え方] $t \to t_0$ とすると $P \to P_0$ となるので直線 P_0P は曲線の接線に近づくと考えられるが

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{P_0P}}{t-t_0}$$

だから $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ は接線の方向ベクトルとなる。

ベクトル解析

曲線と線積分

以後, 曲線 C はパラメータ表示 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{r}(t)$ を持ち, $\vec{r}(t)$ は連続微分可能で,

ある小さい正の数 $\delta > 0$ があってすべての t に対して $|\dot{\vec{r}}(t)| \geqq \delta$

を満たすものとする。

ベクトル解析
曲線と線積分

曲線の長さ

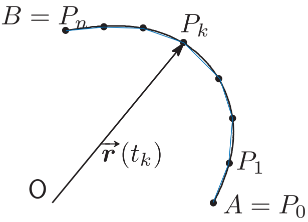
曲線 C の分点を

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \cdots, \mathsf{P}_n = \mathsf{B}$$

とするとき C の長さ L を

$$L = \lim \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k$$

と定める．lim は分点の間隔を細かくする極限。



ベクトル解析

曲線と線積分

曲線の長さのパラメータによる計算

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

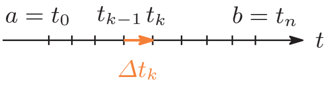
である．成分表示 $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を使うと

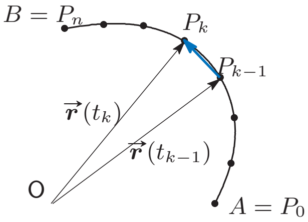
$$= \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[確かめ]





$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{r}(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left| \frac{\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \right| \Delta t_k$$

$$L \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \right| \Delta t_k \to \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

弧長パラメータの定義

$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t), \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_0)$ のとき

$$s = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\tau} \right| d\tau = \begin{cases} \text{曲線 AP の長さ} & (t > t_0 \text{のとき}) \\ -\text{曲線 AP の長さ} & (t < t_0 \text{のとき}) \end{cases}$$

で決まる s を弧長パラメータという。

$\dfrac{ds}{dt} = \left| \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right|$ だから $ds = \left| \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$ (線要素とよぶ)

$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}$ だから $d\vec{\boldsymbol{r}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}\, dt$

ベクトル解析
曲線と線積分

線積分

[スカラー場]

$$\begin{array}{ccc} \text{点} & & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & f(\mathrm{P}) \end{array}$$

電位，電荷密度などで現れる。

[ベクトル場]

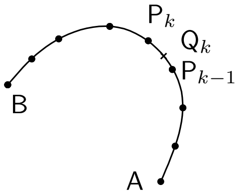
$$\begin{array}{ccc} \text{点} & & \text{ベクトル} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{P}) \end{array}$$

電磁場，流体の速度場などで現れる。

ベクトル解析

曲線と線積分

スカラー場の線積分の定義



曲線 C 上の, スカラー場 $\mathrm{P} \mapsto f(\mathrm{P})$ の線積分を

$$\int_C f(\mathrm{P})\,ds = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{Q}_k)\,\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$$

で定める。ただし

$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$: C の分点,
Q_k : C の P_{k-1} から P_k までの部分に含まれる点
$\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$: P_{k-1} から P_k までの弧長.
$\lim$ は分割を細かくする極限

スカラー場 の線積分は, 区間 $[a, b]$ 上の関数の定積分を曲線上に拡張したもの。
(ただし $a < b$ とする。)

ベクトル解析

曲線と線積分

パラメータ表示によるスカラー場の線積分の計算

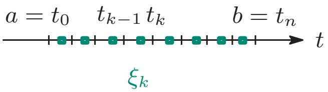
$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leqq t \leqq b,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$$

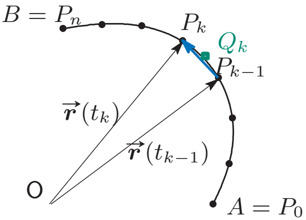
$$\Rightarrow \quad \int_C f(\mathrm{P})\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[確かめ]





$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_k),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}_k} = \vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k),\quad k = 0, 1, \ldots, n$$

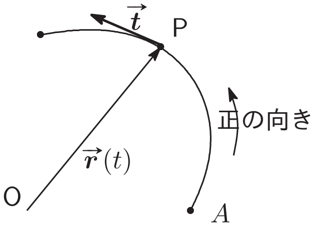
とすると $f(P) = f(\vec{\boldsymbol{r}}(t))$ と書いて

$$\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \fallingdotseq |\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left|\frac{\vec{\boldsymbol{r}}(t_k) - \vec{\boldsymbol{r}}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\right| \Delta t_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k)) \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\right| \Delta t_k \to \int_a^b f(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\right| dt$$

ベクトル解析
曲線と線積分

[曲線の向き付け]



曲線
$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$
に向きを付ける。

この向きと, t が増加するとき P の動く向きが一致するとき, t を正のパラメータという。

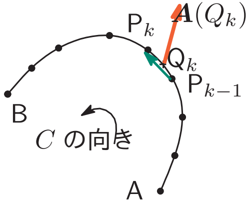
$\vec{\boldsymbol{t}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \div \left|\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\right|$

を正の単位接ベクトルという。以後 t は正のパラメータとする。

ベクトル解析

曲線と線積分

ベクトル場の線積分の定義



曲線 C 上の, ベクトル場 $\mathsf{P} \mapsto \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{P})$ の線積分を

$$\int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\mathsf{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k} \quad \cdots (\star)$$

で定める。(記号はスカラー場の場合と同じ)

ベクトル解析

曲線と線積分

パラメータ表示によるベクトル場の線積分の計算

$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leqq t \leqq b$, 正のパラメータ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a), \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$

$$\Rightarrow \quad \int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)}) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\, dt = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)}) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\, ds$$

[確かめ]　前と同じ記号で

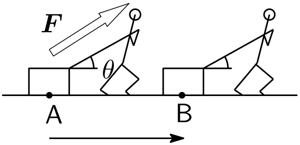
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{r}}_k}{\Delta t_k} \Delta t_k \fallingdotseq \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\Delta t_k, \quad \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{Q}_k) = \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\xi_k)})$$

$$(\star) \text{ の右辺} \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\overrightarrow{\boldsymbol{r}(\xi_k)}) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\Delta t_k \to \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt$$

ベクトル解析

曲線と線積分

[力の場での仕事]　空間の点 P に対して力 $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ が決まるとき, $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ を力の場という. 力の場 $\vec{\boldsymbol{F}}$ の中で曲線 C に沿って物体を移動させるとき, $\vec{\boldsymbol{F}}$ のする仕事 W を定める.



$\vec{\boldsymbol{F}}$: 定ベクトル. C : 線分 AB (A から B へ向き付ける) の場合。
$\vec{\boldsymbol{F}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角を θ とするとき

$$W = |\vec{\boldsymbol{F}}|\,\mathrm{AB}\,\cos\theta = \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

一般の場合。C を折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_n$ で近似して各線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ 上では $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ は 定ベクトル $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{Q}_k)$ で近似して, W を

.

$$W = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}}$$

と定める.