本日やること

1. ガイダンス
2. ベクトル
   - ベクトルの定義・性質
   - ベクトルの大きさ
   - ベクトルの和
   - ベクトルのスカラー倍
   - ベクトルの成分表示
   - 2 点を結ぶベクトル
   - 内積
   - ベクトルの外積
3. ベクトル関数
   - ベクトル関数の定義・極限・連続性

応用数学 C　ガイダンス

科目の内容

1. ベクトル解析：ベクトル値関数の微積分・場の解析・保存場・線積分・面積分・積分定理

2. フーリエ変換と偏微分方程式

3. このほかに eMaT の勉強もしようと思う

授業の進め方

講義（スライドを使う）と演習（問題を配布する）。スライドは事前にプリントアウトしておくこと。ノートを作ってください。スライドに書き込むのも可。

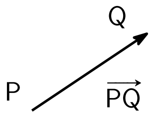
評価

試験（中間と期末）と演習プリントの提出で評価する。

ベクトル

ベクトル

ベクトルの定義

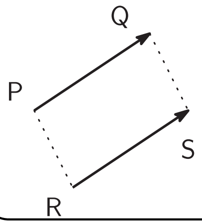


図のような向きのついた線分を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表し ベクトル PQ とよぶ

P：始点

Q：終点

記号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ も用いる

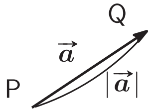


ただし平行移動して重なるベクトルは同じものと考える。

ベクトル

ベクトルの大きさ・和

ベクトルの大きさ



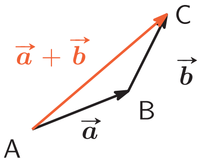
$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき

線分 PQ の長さのことを $\vec{a}$ の**大きさ**と定め，$|\vec{a}|$ で表す。

ベクトル

ベクトルの和

ベクトルの和の定義



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

のときベクトルの和を

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

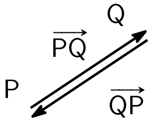
で定める。

ベクトル

ベクトルの和

[0 ベクトル]　:　始点と終点が一致したベクトルを 0 ベクトルといい $\vec{\mathbf{0}}$ で表す。

[逆ベクトル]



$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の逆ベクトルと定め
$-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表す

[ベクトルの差] :　$\vec{\boldsymbol{a}} + (-\vec{\boldsymbol{b}})$ を $\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}$ と書くことにする

ベクトル

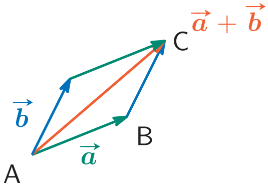
ベクトルの和の性質

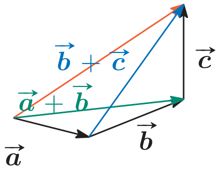
ベクトルの和の性質

[0] : $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, $\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$,

[I] : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交換法則)

[II] : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)





ベクトル

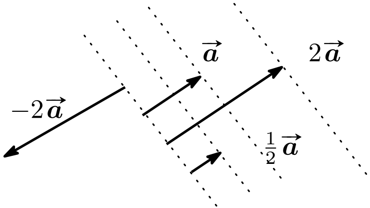
ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の定義

m : 実数 (スカラー), $\vec{\boldsymbol{a}}$: ベクトル とするとき, **スカラー倍**を

$$m\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{cases} \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と同じ向きのベクトル} & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \vec{\boldsymbol{0}} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と反対向きのベクトル} & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。



ベクトル

ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の性質

m, n : 実数 (スカラー), $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$: ベクトル のとき

[III] : $m(n\vec{\boldsymbol{a}}) = (mn)\vec{\boldsymbol{a}}$,

[IV] : $(m+n)\vec{\boldsymbol{a}} = m\vec{\boldsymbol{a}} + n\vec{\boldsymbol{a}}$

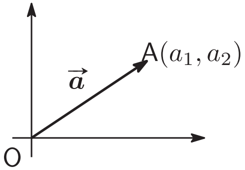
[V] : $m(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) = m\vec{\boldsymbol{a}} + m\vec{\boldsymbol{b}}$

[VI] : $|m\vec{\boldsymbol{a}}| = |m||\vec{\boldsymbol{a}}|$

ベクトル

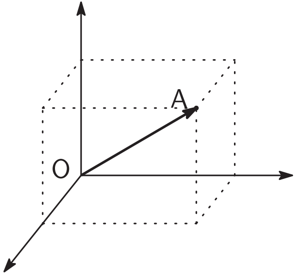
成分表示

ベクトルの成分表示の定義



[平面の場合]　$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，A$(a_1, a_2)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2)$



[空間の場合]　$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，A$(a_1, a_2, a_3)$ のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

と表す．これを $\vec{a}$ の成分表示という．

ベクトル

成分表示

ベクトルの成分による計算

[平面の場合] $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2)$ のとき

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$

[II] : $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

[III] : $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

[VI] : $m\vec{\boldsymbol{a}} = (ma_1, ma_2)$ (m はスカラー)

[空間の場合] $\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

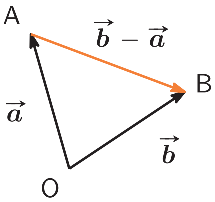
[II] : $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

[III] : $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

[VI] : $m\vec{\boldsymbol{a}} = (ma_1, ma_2, ma_3)$ (m はスカラー)

ベクトル

2 点を結ぶベクトル



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

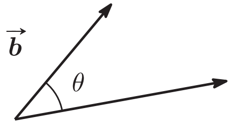
A の座標 (a_1, a_2), B の座標 (b_1, b_2) のとき

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\quad\vec{b}=(b_1, b_2)$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

ベクトル
内積

内積の定義



$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき
内積 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ を

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, & (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\text{のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

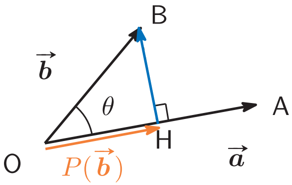
で定める。

内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ

ベクトル

内積

正射影



$\vec{a}=$ OA, $\vec{b}=$ OB とし，
B から直線 OA に引いた垂線と OA の交点を H とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への**正射影**といい，$P(\vec{b})$ で表す。

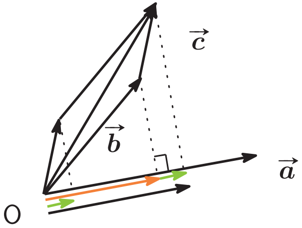
$$\vec{h}=P(\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{h}=t\vec{a} \text{ となる実数 } t \text{ があり，} \vec{b}-\vec{h}\perp\vec{a} \quad \cdots(\star)$$

$$\frac{|P(\vec{b})|}{|\vec{b}|}=|\cos\theta| \quad \text{であり} \quad \text{この } t \text{ は } t=\frac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}$$

ベクトル

内積

正射影の線形性



$$P(\vec{b}+\vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$$

[確かめ] $\vec{h} = P(\vec{b}) = t\vec{a}$, $\vec{k} = P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$\vec{h} + \vec{k} = (t+s)\vec{a} \quad \cdots (\star\star)$,

また $\vec{b} - \vec{h} \perp \vec{a}$, $\vec{c} - \vec{k} \perp \vec{a}$ だから

$(\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{h} + \vec{k}) \perp \vec{a}$

だから $(\star)$ より $P(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{h} + \vec{k}$

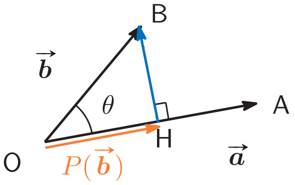
ベクトル

内積

内積の分配法則

$$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}$$

[確かめ]



$P(\vec{b}) = t\vec{a}$ とすると $t = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\theta$ だから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t|\vec{a}|^2$$

同様に $P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = s|\vec{a}|^2$$

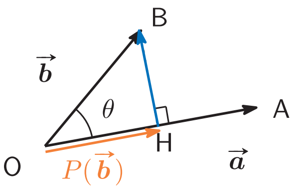
$(\star\star)$ より $P(\vec{b} + \vec{c}) = (t+s)\vec{a}$ だから

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (t+s)|\vec{a}|^2$$

あわせて結論を得る。

ベクトル
内積（やり直し）

正射影



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，
B から直線 OA に引いた垂線と OA の交点を H とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影といい，$P(\vec{b})$ で表す。

$$\vec{h} = P(\vec{b}) \;\Leftrightarrow\; \vec{h} = t\vec{a} \text{ となる実数 } t \text{ があり，} \vec{b} - \vec{h} \perp \vec{a} \quad \cdots(\star)$$

$\cos x$ の定義により数直線 OA での H の座標は $|\vec{b}|\cos\theta$. したがって

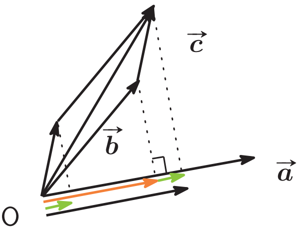
$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = |\vec{b}|\cos\theta\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$　だから　$t = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\theta$

また　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = t|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{h}$

ベクトル

内積（やり直し）

正射影の線形性



$$P(\vec{b}+\vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$$

[確かめ] $\vec{h} = P(\vec{b}) = t\vec{a}$, $\vec{k} = P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$$\vec{h}+\vec{k} = (t+s)\vec{a} \quad \cdots (\star\star),$$

また $\vec{b}-\vec{h} \perp \vec{a}$, $\vec{c}-\vec{k} \perp \vec{a}$ だから $(\vec{b}-\vec{h})+(\vec{c}-\vec{k}) \perp \vec{a}$ つまり

$$(\vec{b}+\vec{c})-(\vec{h}+\vec{k}) \perp \vec{a}$$

だから $(\star)$ より $P(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{h}+\vec{k}$

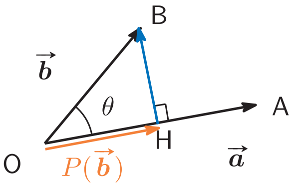
ベクトル

内積（やり直し）

内積の分配法則

$$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}$$

[確かめ]



$P(\vec{b}) = t\vec{a}$ とすると　$\vec{a} \cdot \vec{b} = t|\vec{a}|^2$

同様に $P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると　$\vec{a} \cdot \vec{c} = s|\vec{a}|^2$

$(\star\star)$ より $P(\vec{b} + \vec{c}) = (t+s)\vec{a}$ だから

$\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (t+s)|\vec{a}|^2$

あわせて結論を得る。

ベクトル

内積

内積の性質

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2$

[II] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}}$

[III] : $(m\vec{\boldsymbol{a}}) \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (m\vec{\boldsymbol{b}}) = m(\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}})$ (m はスカラー)

[VI] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{c}}$ (分配法則)

ベクトル

内積の成分表示

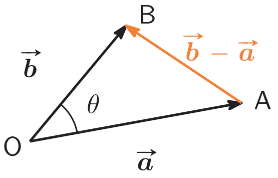
内積の成分表示

[平面の場合] $\vec{a} = (a_1, a_2),\ \vec{b} = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

[空間の場合] $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

内積の性質 [I], [II], [IV] を用いて

[平面の場合の確かめ]



$$
\begin{aligned}
|\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\
&= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}
\end{aligned}
$$

したがって

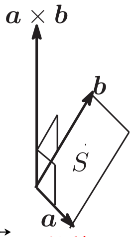
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ベクトル

ベクトルの外積

空間のベクトルの外積の定義



$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$: 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{c}}$, $\vec{\boldsymbol{b}} \perp \vec{\boldsymbol{c}}$

(ii) $|\vec{\boldsymbol{c}}| =$ $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ の張る平行四辺形の面積
(= S とおく)

(iii) $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}\}$ は右手系

を満たすベクトル $\vec{\boldsymbol{c}}$ がただ一つある。この $\vec{\boldsymbol{c}}$ を $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ の外積といい

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$$

であらわす。

$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ が 1 次従属ならば $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ と定める。

ベクトル

ベクトルの外積

外積の成分表示

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

ベクトル

ベクトルの外積

[確かめ]

$\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ とおくと $\vec{c}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことを示す。

$$\vec{a} \bullet \vec{c} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

だから $\vec{a} \perp \vec{c}$. 同様に $\vec{b} \perp \vec{c}$.

$$|\vec{c}|^2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ の張る平行六面体の体積} = |\vec{c}|S$$

だから $|\vec{c}| = S$ かつ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ は右手系.

ベクトル値関数

ベクトル値関数の定義

ベクトル値関数の定義

[1 変数ベクトル (値) 関数]：$t \in \mathbb{R}$ に ベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ を対応させる関数 $t \mapsto \boldsymbol{A}(t)$

運動する点の位置，速度，加速度や，その軌跡である曲線を表すために使われる．

[2 変数ベクトル (値) 関数]：2 個の実数の組 (t, s) にベクトル $\boldsymbol{A}(t, s)$ を対応させる写像 $(t_1, t_2) \mapsto \boldsymbol{A}(t_1, t_2)$

これは曲面を表わすために使われる．

ベクトル値関数

ベクトル値関数の成分表示

ベクトル値関数の成分表示

[1 変数ベクトル関数]

平面の場合： $\boldsymbol{A}(t) = (x(t), y(t))$

空間の場合： $\boldsymbol{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

[2 変数ベクトル関数]

平面の場合： $\boldsymbol{A}(t, s) = (x(t, s), y(t, s))$

空間の場合： $\boldsymbol{A}(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$

ベクトル値関数

ベクトル値関数の収束・極限

1 変数ベクトル値関数の収束・極限

$t \to t_0$ のとき $\boldsymbol{A}(t)$ が極限 $\boldsymbol{A}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ に 収束する というのは

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}_0| = 0$$

となることであると定め,

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0 \quad \text{または} \quad \boldsymbol{A}(t) \to \boldsymbol{A}_0 \ (t \to t_0)$$

で表す．実はこれは $\boldsymbol{A}(t)$ の各成分関数が $\boldsymbol{A}_0$ の対応する成分に収束することと同じである．つまり

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \\ \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \\ \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0 \end{cases}$$

ベクトル値関数

ベクトル値関数の微分係数・導関数

$\boldsymbol{A}(t)$ が 点 t_0 で微分可能である というのは極限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{A}(t_0)}{\Delta t}$$

が存在することと定める．またその極限を点 t_0 における $\boldsymbol{A}(t)$ の微分係数 といい $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{A}}(t_0)$ で表す．

各点で微分可能であるとき ベクトル値関数 $t \mapsto \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)$ が考えられるが，これを $\boldsymbol{A}(t)$ の 導関数 という．

極限と同様にベクトル値関数が微分可能であることと各成分関数が微分可能であることとは同じことであり

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t) \right)$$

となる．高階導関数についても同様に定める．