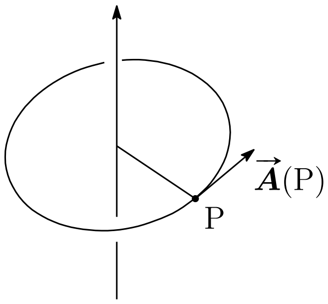
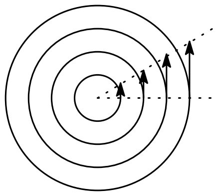
応用数学 C 演習問題 No.9 解答

問題 1. 次のベクトル場 $\vec{\boldsymbol{A}}$ の回転を求めよ。

(1) $\vec{\boldsymbol{A}}(P) = (-\omega y, \omega x, 0)$





z 軸方向から見た図

運動する点 P が t を時刻として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, b) \text{ (これを } = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \text{ と書く)}$$

ただし $a > 0,\ b,\ \omega > 0$ は定数

のようにパラメータ表示されているものとする。これは z 軸を中心とする等速円運動である。この点の速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}$ は

$$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (-a\omega\sin\omega t, a\omega\cos\omega t, 0)$$

P の座標を (x, y, z) とすると

$$= (-\omega y, \omega x, 0) = \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{P})$$

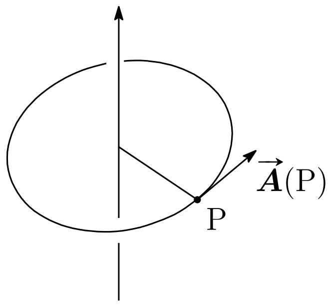
だから $\boldsymbol{A}$ は z 軸を中心として角速度 ω で等速円運動する流れの速度ベクトル場であるということができる。

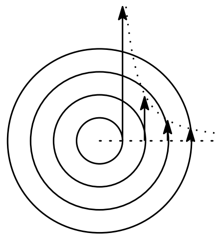
$\vec{\boldsymbol{A}}$ の回転を計算する。$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ として

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}$$
$$= ((0)_y - (\omega x)_z, (-\omega y)_z - (0)_x, (\omega x)_x - (-\omega y)_y) = (0, 0, 2\omega)$$

だからどこでも一定のベクトル場である。

(2) $\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \dfrac{(-\omega y, \omega x, 0)}{r^2}$, $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$





z 軸方向から見た図

P のパラメータ表示が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(a\cos\frac{\omega t}{a^2}, a\sin\frac{\omega t}{a^2}, b\right) \quad (\text{これを} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \text{ と書く})$$

ただし $a > 0,\ b,\ \omega > 0$ は定数

であるものとする。これも z 軸を中心とする円運動であるが, 中心軸に近いほど回転が速い。この点の速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}$ は

$$\frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \left(\frac{-a\omega}{a^2}\sin\frac{\omega t}{a^2}, \frac{a\omega}{a^2}\cos\frac{\omega t}{a^2}, 0\right)$$

P の座標を (x, y, z) とすると

$$= \left(\frac{-\omega y}{r^2}, \frac{\omega x}{r^2}, 0\right) = \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{P})$$

だから $\boldsymbol{A}$ は z 軸を中心として角速度 $\dfrac{\omega}{r^2}$ で円運動する流れの速度ベクトル場であるということができる。

$\vec{\boldsymbol{A}}$ の回転を計算する。まず $r > 0$ のとき

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-\omega y}{r^2} & \frac{\omega x}{r^2} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \left((0)_y - \left(\frac{\omega x}{r^2}\right)_z, \left(\frac{-\omega y}{r^2}\right)_z - (0)_x, \left(\frac{\omega x}{r^2}\right)_x - \left(\frac{-\omega y}{r^2}\right)_y\right)$$

ここで x, y, r は z に無関係だから

$$\left(\frac{\omega x}{r^2}\right)_z = \left(\frac{-\omega y}{r^2}\right)_z = 0$$

また

$$\left(\frac{\omega x}{r^2}\right)_x = \frac{(\omega x)_x r^2 - \omega x (r^2)_x}{r^4}$$

$r^2 = x^2 + y^2$ だから

$$= \frac{\omega r^2 - \omega x(2x)}{r^4} = \frac{\omega(-x^2 + y^2)}{r^4}$$

同様に

$$\left(\frac{-\omega x}{r^2} \right)_y = \frac{\omega(x^2 - y^2)}{r^4}$$

以上をまとめて

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{A}} = (0, 0, 0)$$

$r = 0$ のところ, 即ち z 軸上では $\vec{\boldsymbol{A}}$ も $\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{A}}$ も定義できないが, 超関数の考え方を使うと z 軸上に渦が集中していると考えることができる。