応用数学 C 演習問題 No.8 解答

1. $\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \dfrac{(x, y, z)}{r^3}$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ のとき

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \begin{cases} 0, & (\mathrm{P} \neq \mathrm{O}\text{ のとき}) \\ \text{定義できない}, & (\mathrm{P} = \mathrm{O}\text{ のとき}) \end{cases}$$

を示せ。

<u>P≠O とする。</u>

$$\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

だから

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \left(\frac{x}{r^3}\right)_x + \left(\frac{y}{r^3}\right)_y + \left(\frac{z}{r^3}\right)_z$$

である。商の微分法と合成関数の微分法を使って

$$\left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{(x)_x r^3 - x(r^3)_x}{r^6}$$

$$(x)_x = 1$$

$$(r^3)_x = (r^3)_r r_x = 3r^2 r_x$$

$$r_x = (\sqrt{t})_t t_x = \frac{1}{2\sqrt{t}} 2x = \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x}{r} \quad (x^2 + y^2 + z^2 = t\text{ とおいた})$$

だから

$$\left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

同様にして

$$\left(\frac{y}{r^3}\right)_y = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$$

$$\left(\frac{z}{r^3}\right)_z = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

以上を総和して

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P) = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

追加 G は 空間の領域, S は G の境界で S は連続微分可能なパラメータ表示を持つ曲面であるとする。$\vec{\boldsymbol{n}}$ を外向き単位法ベクトルとする。

このとき

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS = \begin{cases} 0, & (\mathrm{O} \notin G \cup S \text{ のとき}) \\ 4\pi, & (\mathrm{O} \in G \text{ のとき}) \end{cases}$$

を示せ。(O$\in$ S の場合はすこし微妙である。)

(i) $O \notin G \cup S$ のとき。G のすべての点で $\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}(P)$ が定義できて $=0$ となるから Gauss の積分定理により

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS = \iiint_G \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}\, dxdydz = 0$$

(ii) O が G の内部にあるとき。つまり, 原点を中心とし, ある $R > 0$ を半径とする球 B_R が G に含まれるとき。

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS = \iint_{S_R} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS = 4\pi \quad (\text{ただし } S_R \text{ は } B_R \text{ の表面})$$

である。このことを示そう。

G' を G から B_R を取り除いたものとする。G' の表面は $S \cup S_R$ となる。Gauss の定理により

$$\iint_{S \cup S_R} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_{G'} \mathrm{div}\vec{\boldsymbol{A}}\, dxdydz = 0$$

一方,

$$\iint_{S \cup S_R} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS - \iint_{S_R} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}}\, dS$$

である。ただし左辺の面積分は G' の外向きを正の向きと考え, 右辺の第 2 項の面積分は B_R の外向きを正の向きと考えるので左辺に現れる $\vec{\boldsymbol{n}}$ と右辺に現れる $\vec{\boldsymbol{n}}$ は符号が反対になる。このことから

$$\iint_S \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS = \iint_{S_R} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS$$

がわかる。つぎに球面 S_R 上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ では

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{(x, y, z)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R^2$$

だから積分すると

$$\begin{aligned} \iint_{S_R} \vec{\boldsymbol{A}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} dS &= \int_{S_R} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) \bullet \frac{(x, y, z)}{r}\, dS = \int_{S_R} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4}\, dS \\ &= \int_{S_R} \frac{1}{r^2}\, dS = \frac{1}{R^2} \int_{S_R} dS = 4\pi \end{aligned}$$