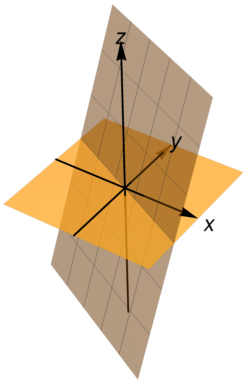
応用数学 C 演習問題 No.4 解答

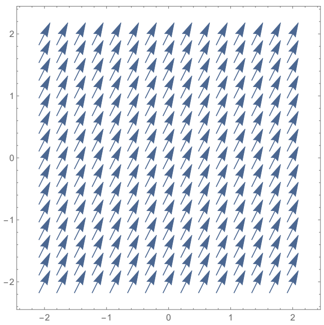
学生番号		氏名	

問題 1. 平面のスカラー場 $f(x,y)=x+2y$, のグラフ, 勾配ベクトル場, 等高線を求めよ。

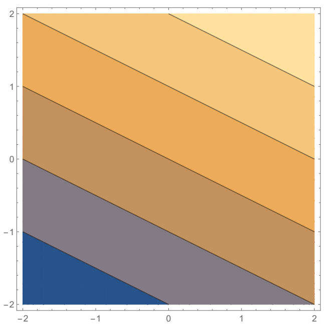
グラフは



$\mathrm{grad}f=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(1,2)$ 一様なベクトル場となる。



等高線は



問題 2. 空間のスカラー場 $f(x,y,z)=-\dfrac{1}{r}$, を考える. ただし $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である.

勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}f$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}f(x,y,z)&=(f_x(x,y,z),f_y(x,y,z),f_z(x,y,z))\\&=\left(\left(\frac{1}{r}\right)_x,\left(\frac{1}{r}\right)_y,\left(\frac{1}{r}\right)_z\right)\end{aligned}$$

合成関数の微分法により

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x=\left(\frac{1}{r}\right)_r\times r_x$$

ここで

$$\left(\frac{1}{r}\right)_r=-\frac{1}{r^2},$$

また $x^2+y^2+z^2=t$ とおいて合成関数の微分法により

$$r_x=\left(\sqrt{t}\right)_t\times t_x=\frac{1}{2\sqrt{t}}2x=\frac{x}{r}$$

だから

$$\left(\frac{1}{r}\right)_x=-\frac{x}{r^3},$$

同様にして

$$\left(\frac{1}{r}\right)_y=-\frac{y}{r^3},\quad\left(\frac{1}{r}\right)_z=-\frac{z}{r^3}$$

だから

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=\left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}(x,y,z)$$