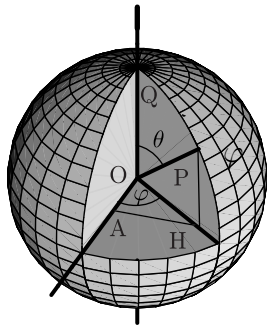


応用数学C 演習問題 No.4

- 1 (1) 原点中心半径 $a > 0$ の球面を S で表す. S 上の点 P の球面座標 θ, φ によって \overrightarrow{OP} の成分を表わせ. (これを $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$ とおく.) また θ, φ の値の取りうる範囲を書け.



P から xy 平面に引いた垂線と xy 平面の交点を H とする. $OH = a \sin \theta$ である. P の直角座標を (x, y, z) とすると

$$x = OH \cos \varphi = a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = OH \sin \varphi = a \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = a \cos \theta$$

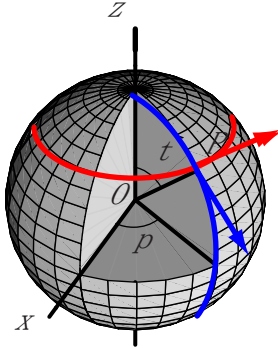
であり, また $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ だから

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta)$$

ただし θ, φ の動く範囲は

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

(2) 図を地球儀に見立てよう. φ を一定として θ だけを変化させると点 P は北極から南極に向かって南北方向に動く. だから θ 曲線は P を通る経線である. θ を一定として φ だけを変化させると点 P は xy 平面に平行に東西方向に動く. だから φ 曲線は P を通る緯線である.



(3) $\mathbf{r}(\theta, \varphi)$ を偏微分して得られるベクトル $\mathbf{r}_\theta, \mathbf{r}_\varphi$ を a, θ, φ を用いて成分表示し、図中に書き入れよ。

$$\mathbf{r}_\theta = ((a \sin \theta \cos \varphi)_\theta, (a \sin \theta \sin \varphi)_\theta, (a \cos \theta)_\theta) = (a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, -a \sin \theta)$$

は θ 曲線の接ベクトルであり南向きのベクトルで、大きさは a である。

$$\mathbf{r}_\varphi = ((a \sin \theta \cos \varphi)_\varphi, (a \sin \theta \sin \varphi)_\varphi, (a \cos \theta)_\varphi) = (-a \sin \theta \sin \varphi, a \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

は φ 曲線の接ベクトルであり東向きのベクトルで、大きさは $a \sin \theta$ である。

(4) $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi$ を a, θ, φ を用いて成分表示せよ。また、 $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi$ と \mathbf{r} は平行になることを確かめよ。

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi$$

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{vmatrix} a \cos \theta \sin \varphi & -a \sin \theta \\ a \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a \sin \theta & a \cos \theta \cos \varphi \\ 0 & -a \sin \theta \sin \varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a \cos \theta \cos \varphi & a \cos \theta \sin \varphi \\ -a \sin \theta \sin \varphi & a \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} \right) \\ &= (a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi, a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi, a^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + a^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) \\ &= (a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi, a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi, a^2 \cos \theta \sin \theta) \\ &= a \sin \theta (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta) = a \sin \theta \mathbf{r}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

だから $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi$ と \mathbf{r} は平行になる。

(5) 面積要素 $dS = |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| d\theta d\varphi$ を求めよ。

(4) より $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = a \sin \theta \mathbf{r}(\theta, \varphi)$ だから $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| = a \sin \theta |\mathbf{r}(\theta, \varphi)| = a^2 \sin \theta$.

従って $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

(6) S の面積を求めよ。

$$\begin{aligned} &\iint_S dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} [-a^2 \cos \theta]_0^\pi d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 2a^2 d\varphi = 4\pi a^2.
\end{aligned}$$

(7) S の $z \geq \frac{a}{\sqrt{2}}$ である部分 S' の面積を求めよ.

点 P がこの部分を動くとき θ, φ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の範囲を動くので,

$$\begin{aligned}
\iint_{S'} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} [-a^2 \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) a^2.
\end{aligned}$$

(8) S を外向きに向き付ける. $\mathbf{r} = (x, y, z), r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおく. ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ を S 上で面積分せよ.

$\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n}$ だから

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \frac{1}{r^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{a^2} \iint_S dS = \frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi$$