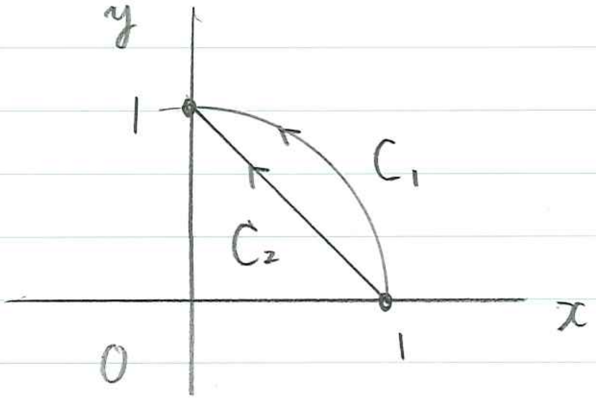
No. 2 . 1.

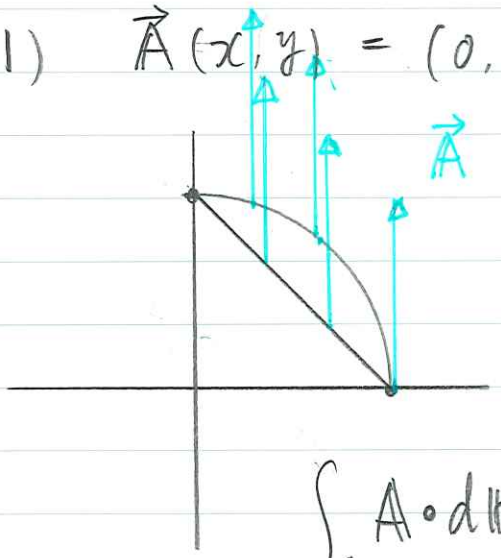
C_1 : $\overrightarrow{OP} = (\cos t, \sin t)$. (これを $\mathbb{r}_1(t)$ とおく。),
$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

C_2 : $\overrightarrow{OP} = (1-t, t)$, (これを $\mathbb{r}_2(t)$ とおく.)
$0 \leqq t \leqq 1$.

どちらも t の増加する方向に向き付ける.



(1) $\vec{A}(x, y) = (0, 1)$ のとき



A は一様なベクトル場である。

C_1 上

$$d\mathbb{r}_1 = \frac{d\mathbb{r}_1}{dt}dt = (-\sin t, \cos t)dt$$

だから

$$\int_{C_1} A \cdot d\mathbb{r}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 1)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1_{\,/\!/}$$

C_2 では

$$d\mathbb{r}_2 = \frac{d\mathbb{r}_2}{dt}dt = (-1, 1)dt$$

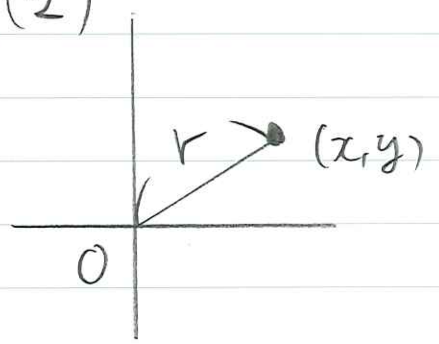
だから

$$\int_{C_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}_2 = \int_0^1 (0, 1)(-1, 1)\,dt$$

$$= \int_0^1 dt = 1$$

じつは $\mathbb{A}$ は保存場であり、曲線の始点、終点のみで線積分がきまる。

(2)



$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと

$$\mathbb{B} = \frac{(x, y)}{r^3}$$

であるから、原点中心に放射状にひろがっており

$|\mathbb{B}| = \frac{|(x, y)|}{r^3} = \frac{1}{r^2}$ だから、大きさは r^2 に反比例する。

$$\int_{C_1} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{r}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x, y)}{r^3}\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt$$

C_1 上で $r=1$, $x=\cos t$, $y=\sin t$ だから

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t, \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt = 0$$

$$\int_{C_2} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{r}_2 = \int_0^1 \frac{(x,y)}{r^3}\cdot(-1,1)\,dt.$$

C_2上　$r=\sqrt{(1-t)^2+t^2}$, $x=1-t$, $y=t$ だから

$$= \int_0^1 \frac{2t-1}{((1-t)^2+t^2)^{3/2}}\,dt.$$

$(1-t)^2+t^2 = 2t^2-2t+1 = u$. とおくと,

$\dfrac{du}{dt} = 4t-2$. だから $(2t-1)dt = \dfrac{du}{2}$.

$t=0 \Rightarrow u=1$, $t=1 \Rightarrow u=1$.

だから

$$= \int_1^1 \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{2} = 0.$$

じつは $\mathbb{B}$ も中心力場であるので保存場

であり, 曲線の始点, 終点のみで

線積分がきまる