# 講義第14回のメモ

## 1. 複素関数

$\mathbb{C}$：複素数全体の集合

$\mathbb{R}$：実数全体の集合

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ～ 平面の点の全体

と書く。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \approx & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ z = x + iy & & (x, y) \end{array}$$

によって $\mathbb{C}$ は平面とみなされる。

$D \subset \mathbb{C}$ を平面の領域とする。

$$\begin{array}{cccc} f: & D^{\subset \mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & & w \end{array}$$

$z \in D$ に $w \in \mathbb{C}$ を対応させる関数を<u>複素関数</u>という

$w = f(z)$ とも書く。

## 2. 正則関数

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy) \quad ; \quad \text{(実数値関数となる)}$$

$$v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy) \quad (\quad " \quad)$$

とおくと、

$$f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y).$$

だから　複素関数 $f(z)$ は、平面のベクトル場

$$(x,y) \longmapsto (u,v)$$

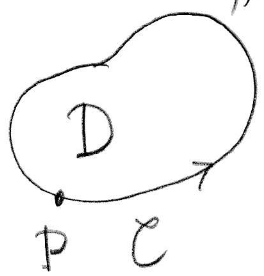
と、同一視できる。

**定義**. $D$ 上の複素関数 $f(z)$ が正則であるとは、$D$ 上で Cauchy-Riemann 方程式

$$v_x + u_y = 0 \;(1), \quad u_x - v_y = 0 \;(2)$$

をみたすこと。

## 3. Cauchyの積分定理




C は D の境界となる閉曲線で、パラメータ表示を

$$C\ ;\ \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}(t), \quad a \leqq t \leqq b$$

とする。$\mathbf{r}(t)$ の成分表示を

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

とする。$\mathbf{r}(t)$ は連続微分可能とする。

**Cauchyの積分定理.** $f(z)$ を D 上の正則関数とするとき

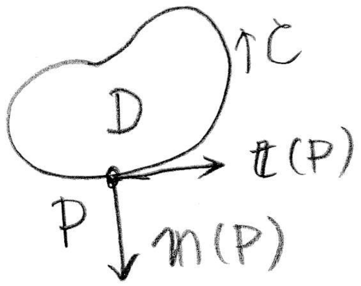
$$\int_C f(z)\,dz = 0 \qquad (3)$$

である。ただし左辺の積分は

$$\int_a^b (u+iv)\cdot(x'(t)+iy'(t))\,dt \qquad (4)$$

で定める。

以下証明する




$\boldsymbol{t}$：$C$の正の向きの単位接ベクトル.

$\boldsymbol{n}$： 〃 〃 外向き単位法ベクトル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A}(x,y) = (u(x,y), -v(x,y))$$

で定める。

Gaussの発散定理によると.

$$\iint_D \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dxdy = \int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,ds. \qquad (5)$$

であるが、

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|} = \frac{(x'(t), y'(t)).}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

:($\boldsymbol{t}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転したもの)

$$ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|dt.$$

だから

(5)の左辺 $= \iint_D (u_x - v_y)\,dxdy$.

(5)の右辺 $= \int_a^b (u y'(t) + v x'(t))\,dt$.

一方 (2) より

$$\iint_D (u_x - v_y)\,dxdy = 0$$

だから

$$\int_a^b (u y'(t) + v x'(t))\,dt = 0 \qquad (6)$$

次に, $\mathbb{A}$ を

$$\mathbb{A}(x, y, z) = (u(x, y), -v(x, y), 0)$$

(以後 $z$ は複素数ではなく, 空間の $z$ 座標を表す)

で 空間のベクトル場に拡張し, D を.
空間内の ($xy$平面にはりついた) 曲面とみなすと.

Stokesの定理により.

$$\iint_D \mathrm{rot}\,\mathbb{A}\bullet\underbrace{(0,0,1)}_{\uparrow}\,dx\,dy = \int_C \mathbb{A}\bullet\mathbb{t}\,ds \quad (7)$$

Dの単位法ベクトル.

であるが,

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & -v & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbb{i} &= (1,0,0) \\ \mathbb{j} &= (0,1,0) \\ \mathbb{k} &= (0,0,1). \end{aligned}$$

$$= -\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{v_z}\,\mathbb{i} + \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{u_z}\,\mathbb{j} + (-v_x - u_y)\,\mathbb{k}$$

だから

$$(7)\text{の左辺} = \iint -(v_x + u_y)\,dx\,dy.$$

(1)により

$$= 0.$$

$$(7)\text{の右辺} = \int_a^b (u\,x'(t) + v\,y'(t))\,dt.$$

だから

$$\int_a^b (u\,x'(t) + v\,y'(t))\,dt = 0 \quad (8)$$

ここで (4) を計算すると

$$(4) = \int_a^b (u+iv)\cdot(x'(t)+iy'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b \{(ux'(t)-vy'(t)) + i(uy'(t)+vx'(t))\}\,dt.$$

(6), (8) により

$$= 0.$$

以上から (3) が証明された。

# 4. C-R方程式をみたす関数 $f(z)$

① $z = x + iy$ は正則である。なぜなら

$$\underset{u}{x} \quad \underset{v}{y}$$

$$\begin{cases} u_x - v_y = 1 - 1 = 0 \\ v_x + u_y = 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

② $z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + 2i\underset{v}{xy}$

$$\begin{cases} u_x - v_y = 2x - 2x = 0 \\ v_x + u_y = 2y - 2y = 0 \end{cases}$$

だから $z^2$ も正則

③ $z^k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ すべて正則

また、$z$ の複素数係数の多項式、さらに

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \text{は複素定数}),$$

が収束するならばすべて正則となる!!