本日やること

1. 偏微分方程式
   - 一次元波動方程式

一次元波動方程式

一次元波動方程式の定義

一次元波動方程式

2 変数の未知関数 $u = u(x, t)$ の偏微分方程式

$$(W_1)\ \ u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad c > 0 \text{ は定数}$$

を一次元波動方程式という.

これは次のような細いパイプ内の空気振動のモデルになっている.

一次元波動方程式

一次元波動方程式の導出

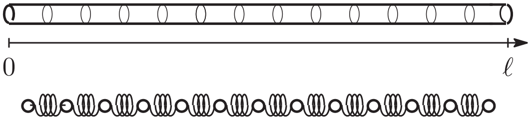


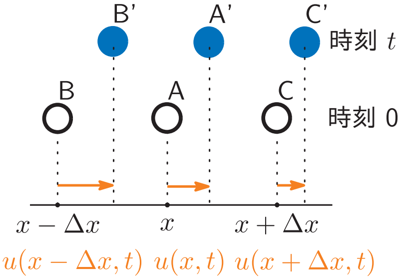
Figure: 空気振動

[空気振動のモデル化] 両端の空いたパイプの中の空気が振動している．
左右に動く仕切りを立ててみると，仕切りにはさまれた部分の空気は左右に押したり引いたりし合いながら伸び縮みしているだろう．空気の運動を計算するため，図のように仕切りの間の空気を仕切りの中間の点に集中させて質点に置き換え，押し引きの力をばねの弾性力で置き換えて考える．

一次元波動方程式

一次元波動方程式の導出

[各質点の運動方程式]



A, B, C : 静止の状態にある質点

A', B', C' : 時刻 t のときの質点

$u(x,t) = A'$の座標 $-$ A の座標
$u(x-\Delta x,t) = B'$の座標 $-$ B の座標
$u(x+\Delta x,t) = C'$の座標 $-$ C の座標
: 時刻 t における変位.

Δx : 仕切りの間隔

ρ : 空気密度

S : パイプの断面積

$\Delta m = \rho S \Delta x$: 質点の質量

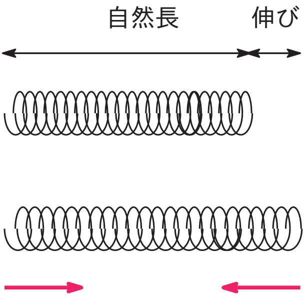
一次元波動方程式

一次元波動方程式の導出

空気の弾性定数を k とすると空気の弾性力が隣の質点に及ぼす力は

$$\text{大きさ} = k\frac{\text{空気の伸びの大きさ}}{\Delta x} \quad \text{(縮みは負の伸びと考える)}$$

$$\text{向き} = \text{この部分が縮む向き}$$



一次元波動方程式

一次元波動方程式の導出

A' を両端でない質点とし, 右向きを正として考えると

$$\begin{aligned}\text{A}'\text{B}'\text{の長さ} &= \text{A}'\text{の座標} - \text{B}'\text{の座標}\\ \text{AB の長さ} &= \text{A の座標} - \text{B の座標}\\ \text{伸び} &= (\text{A}'\text{の座標} - \text{B}'\text{の座標}) - (\text{A の座標} - \text{B の座標})\\ &= u(x,t) - u(x-\Delta x, t)\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\text{B'A' 間のばねが A' に及ぼす力} &= -k\frac{\text{A}'\text{B}' - \text{AB}}{\text{AB}} = -k\frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x},\\ \text{C'A' 間のばねが A' に及ぼす力} &= k\frac{\text{A}'\text{C}' - \text{AC}}{\text{AC}} = k\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\end{aligned}$$

だから

$$\text{A' にかかる力} = k\frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}$$

一次元波動方程式

一次元波動方程式の導出

A' についての運動方程式を立てると

$$(\Delta m)u_{tt}(x,t) = k\frac{u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x,t)}{\Delta x}$$

両辺を Δx で割ると

$$\rho S u_{tt}(x,t) = k\frac{u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}.$$

ここで右辺は Δx が小さいならば Taylor 展開により

$$u(x\pm\Delta x,t) \fallingdotseq u(x,t) \pm u_x(x,t)\Delta x + \frac{u_{xx}(x,t)}{2}(\Delta x)^2$$

だから

$$\frac{u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} \fallingdotseq u_{xx}(x,t)$$

と近似できるから $\Delta x \to 0$ として極限をとると

一次元波動方程式

一次元波動方程式の導出

$$u_{tt}(x,t) = \frac{k}{\rho S} u_{xx}(x,t)$$

となることが分かる. $\dfrac{k}{\rho S} = c^2$ とおけば (W_1) が得られる.
左端の質点では運動方程式は

$$(\Delta m) u_{tt}(0,t) = k \frac{-u(0,t) + u(\Delta x, t)}{\Delta x}$$

となるので $\Delta x \to 0$ として極限をとると $\Delta m \to 0$ だから $u_x(0,t) = 0$ である. 同様にして $u_x(\ell, t) = 0$ であることも分かる.

一次元波動方程式

一次元波動方程式の初期値境界値問題

一次元波動方程式の初期値境界値問題

時刻 0 のときの変位を $f(x)$, 速度を $g(x)$ とすると,

$$(IBVP_{W1}) \quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & 0 < x < \ell,\ t > 0, (W_1) \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t > 0, \qquad (B_1) \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < \ell \qquad (I) \end{cases}$$

となるがこの問題を一次元波動方程式の初期値境界値問題という.

一次元波動方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

初期値問題 $(IBVP_{W1})$ の解を Fourier 級数展開を用いて構成してみよう.

(B_1) をみたす (W_1) の変数分離解を $u(x,t) = X(x)T(t)$ とする.
(W_1) に代入し (B_1) を考慮すると前節と同様な議論により適当な定数 λ があって

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(\ell) = 0, \quad T'' + c^2\lambda T = 0$$

とできることが分かる. だから前節の結果により 変数分離解は

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A + Bt \qquad\qquad \text{および} \\ u(x,t) &= \cos\frac{n\pi}{\ell}x\left(A\cos\frac{cn\pi}{\ell}t + B\sin\frac{cn\pi}{\ell}t\right) \quad (n = 1, 2, \cdots, A, B \text{ は定数} \end{aligned}$$

である.

一次元波動方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

$(IBVP_{W1})$ の解の表示

$(IBVP_{W1})$ の解は変数分離解を組み合わせて

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(a_0 + a_0' t) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{\ell}x \left(a_n \cos\frac{cn\pi}{\ell}t + a_n' \sin\frac{cn\pi}{\ell}t \right)$$

ただし

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad a_n' = \frac{2}{cn\pi}\int_0^{\ell} g(x)\,\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

とすればよい.