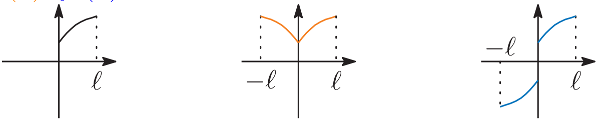
Fourier 級数・半区間展開

偏微分方程式を解くときなどで 関数を $\sin$ だけ, あるいは $\cos$ だけで Fourier 級数展開することが必要になることがある. これを半区間展開というがこの方法を説明する.

$f(x)$ を区間 $(0,\ell]$ で定義された関数とする. このとき

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leqq \ell, \\ \text{任意の数}, & x = 0, \\ f(-x), & -\ell \leqq x < 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leqq \ell, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -\ell \leqq x < 0, \end{cases}$$

で関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ を定義すると



(i) $f_1(x)$, $f_2(x)$ は区間 $[-\ell,\ell]$ で定義された関数で

(ii) $(0,\ell]$ では $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$,

(iii) $f_1(x)$ は偶関数,

(vi) $f_2(x)$ は奇関数.

半区間展開

$f_1(x)$ を $[-\ell,\ell]$ で Fourier 級数に展開すると (iii) より $\cos$ のみで

$$f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

とできる．ただし

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f_1(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx.$$

(ii) より $(0,\ell]$ では

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

となる．これを Fourier 余弦展開という．
同様に $f_2(x)$ を展開することにより Fourier 正弦展開

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad \text{ただし} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$ が得られる．

二階線形常微分方程式の境界値問題

境界値問題・固有値・固有関数

未知関数 $X(x)$ $(0<x<\ell,\ \ell>0)$ の常微分方程式の境界値問題

$$(X_0) \qquad X''+\lambda X=0, \quad X(0)=X(\ell)=0$$

または

$$(X_1) \qquad X''+\lambda X=0, \quad X'(0)=X'(\ell)=0$$

が $X(x)\equiv 0$ でない解 X を持つような定数 λ の値をそれぞれの境界値問題の固有値といい, X をその固有値に対応する固有関数という.

λ, $\boldsymbol{u}$ が行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値, 固有ベクトル $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\neq\vec{\mathbf{0}}$

λ, $X(x)$ が微分作用素 $-\Delta=-\dfrac{d^2}{dx^2}$ の固有値, 固有関数

$$\iff \quad -X''(x)=\lambda X(x), X\not\equiv 0$$

二階線形常微分方程式の境界値問題

(X_0), (X_1) の固有値・固有関数

(X_0) の固有値と固有関数は

$$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \ (\text{これを} = \lambda_n \text{ とおく}),$$
$$\sin\frac{n\pi}{\ell}x \ (\text{これを} = X_n(x) \text{ とおく}) \ (n = 1, 2, \cdots).$$

(X_1) の固有値と固有関数は

$$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \ (\text{これを} = \lambda_n \text{ とおく}),$$
$$\cos\frac{n\pi}{\ell}x \ (\text{これを} = X_n(x) \text{ とおく}) \ (n = 1, 2, \cdots).$$

二階線形常微分方程式の境界値問題

[(X_0) の確かめ] $X'' + \lambda X = 0$ の一般解は

(a) $\lambda < 0$ のとき $X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

(b) $\lambda > 0$ のとき $X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

であるが境界条件 $X(0) = X(\ell) = 0$ を満たすものは

(a) のときは $C_1 = C_2 = 0$ すなわち $X = 0$ しかない.

(b) のときは

$$X(0) = C_1 = 0,\ X(\ell) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$$

だから $\sqrt{\lambda}\ell = n\pi$, $n = 1, 2, \cdots$ ならば $X(x) \neq 0$ である解が作れる. したがって固有値は $\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $n = 1, 2, \cdots$.

(X_1) も同様である.

一次元熱方程式

一次元熱方程式の導出

一次元熱方程式

2 変数の未知関数 $u = u(x,t)$ の偏微分方程式

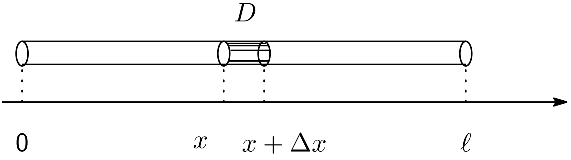
(H_1) $u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad k > 0$ は定数

を一次元熱方程式という.

一次元熱方程式

一次元熱方程式の導出

(H_1) は次のような細い針金の熱伝導問題のモデルになっている.



$\ell > 0$: 針金の長さ

t : 時刻

x : 座標

u : 温度

S : 断面 (積)

D : 針金の小部分

$\rho > 0$: 単位体積当たりの熱容量

a : 単位面積当たりの熱伝導率

S は十分小さいので断面方向の温度は一定としてよいので温度 u は x と t の関数とみなして $u = u(x, t)$ とおく.

一次元熱方程式

一次元熱方程式の導出

u が (H_1) を満たすことを説明しよう.

[D の総熱量の時間変化]

$$\begin{aligned}
\text{時刻 } t \text{ における } D \text{ の総熱量} &\fallingdotseq \rho u(x,t)S\Delta x \\
\text{時刻 } t+\Delta t \text{ における } D \text{ の総熱量} &\fallingdotseq \rho u(x,t+\Delta t)S\Delta x
\end{aligned}$$

だから

$$\text{時間 } \Delta t \text{ の間の } D \text{ の熱量変化} \fallingdotseq \rho(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))S\Delta x \cdots (A)$$

一次元熱方程式

一次元熱方程式の導出

[D の両端での熱の流入] 熱は温度の高い方から低い方へ流れ, 1 秒間に流れる熱量は温度勾配 (つまり x 偏微分係数) に比例する から,

$$\text{左端での熱の流入} \fallingdotseq a(-u_x(x,t))S\Delta t$$
$$\text{右端での熱の流入} \fallingdotseq au_x(x+\Delta x,t)S\Delta t$$

だから

$$\text{時間 } \Delta t \text{ の間の } D \text{ への熱の流入量} \fallingdotseq a\Big(-u_x(x,t)+au_x(x+\Delta x,t)\Big)S\Delta t \cdots (B)$$

[(H_1) の導出] $(A)=(B)$ だから

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} \fallingdotseq \frac{a}{\rho}\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}$$

となるがここで $k=\dfrac{a}{\rho}$ とおき $\Delta x, \Delta t \to 0$ とすると (H_1) となる.

一次元熱方程式

一次元熱方程式の初期値境界値問題

一次元熱方程式の初期値境界値問題

(H_1) に境界条件 B_0 または B_1 と初期条件 (I) を付け加えた問題

$$(IBVP_{H0})\quad \begin{cases} u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t), & 0 < x < \ell, \quad t > 0, & (H_1) \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t > 0, & (B_0) \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \ell. & (I) \end{cases}$$

$$(IBVP_{H1})\quad \begin{cases} u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t), & 0 < x < \ell, \quad t > 0, & (H_1) \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0, & t > 0, & (B_1) \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < \ell. & (I) \end{cases}$$

を一次元熱方程式の初期値境界値問題という．ただし $f(x)$ は既知の関数とする．(B_0) を 0 境界条件，(B_1) を断熱境界条件という．

一次元熱方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

初期値問題 $(IBVP_{H0})$ の解を Fourier 級数展開を用いて構成してみよう.

[変数分離解の構成]　$u(x,t) = X(x)\,T(t)$ の形の $(H_1) + (B_0)$ の解 (変数分離解という) を求める.

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$ を (H_1) に代入すると

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$$

この両辺を $kX(x)T(t)$ で割ると

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} \ (= \text{定数となる！})$$

なぜなら左辺は t に関して定数, 右辺は x に関して定数であり, しかも両辺は恒等的に等しいのであるから, 結局両辺とも x, t によらない定数。 これを $-\lambda$ とおくと

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0, \qquad T' + k\lambda T = 0$$

一次元熱方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

前節の結果により 変数分離解は

$$u(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\,e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}, \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

である.
[変数分離解の重ね合わせ] 適当な係数 $b_n, (n = 1, 2, \cdots)$ と変数分離解を組み合わせた

$$(\star) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\,e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

も $(H_1) + (B_0)$ の解となる. なぜなら項別微分できることを仮定すると

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left(e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\right)_t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left(-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\right) \end{aligned}$$

一次元熱方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

$$
= -k \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{\ell} x\right) \left(e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
u_{xx}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin \frac{n\pi}{\ell} x\right)_{xx} \left(e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin \frac{n\pi}{\ell} x\right) \left(e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \left(\sin \frac{n\pi}{\ell} x\right) \left(e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}\right)
\end{aligned}
$$

となり, この両辺を比較すると (H_1) が得られる.

一次元熱方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

[初期条件 (I) を満たす解の構成] さらに $(\star)$ で

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とすれば, これは $f(x)$ の Fourier 正弦展開の係数であるので

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f(x)$$

となり $(\star)$ は (I) も満たすことが分かる.

一次元熱方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

以上をまとめると

$(IBVP_{H0})$, $(IBVP_{H1})$ の解の表示

初期値問題 $(IBVP_{H0})$, $(IBVP_{H1})$ の解は Fourier 級数を用いてそれぞれ (i), (ii) のように表される.

(i) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \quad \text{ただし } b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

(ii) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right)\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \quad \text{ただし } b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

(ii) も (i) と同様に示される。

一次元熱方程式

初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

[例]　$f(x) = x$ としたとき $(IBVP_{H0})$ の解を求めよう.
$f(x)$ の $(0, \ell]$ における Fourier 正弦展開は

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\ell}{n\pi}(-1)^n \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

だから 解は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\ell}{n\pi}(-1)^n \right) \left(\sin \frac{n\pi}{\ell} x \right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

である.