偏微分方程式とは何か

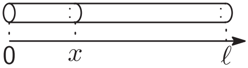
2 つ以上の独立変数を持つ未知関数と、その偏導関数の満たす関係式を偏微分方程式という。

物理学・工学のいろいろな分野で、現象の数学モデルを作るのにつかわれる。

偏微分方程式とは何か

[例 1]　熱方程式

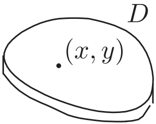
時刻：t



1 次元熱方程式

未知関数：$u(x,t)$ = 時刻 t での 座標 x の点の温度

$$u_t(x,t) = c u_{xx}(x,t),\ 0 < x < \ell,\ t > 0$$

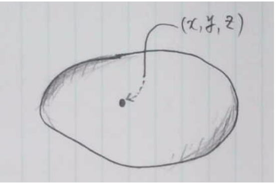


2 次元熱方程式

未知関数：$u(x,y,t)$ = 時刻 t での 座標 (x,y) の点の温度

$$u_t(x,y,t) = c\left(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\right), \\ (x,y) \in D,\ t > 0$$

偏微分方程式とは何か



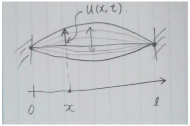
3 次元熱方程式

未知関数：$u(x, y, z, t) =$ 時刻 t での 座標 (x, y, z) の点の温度

$$u_t(x, y, z, t) = c\left(u_{xx}(x, y, z, t) + u_{yy}(x, y, z, t) + u_{zz}(x, y, z, t)\right),$$
$$(x, y, z) \in D,\ \ t > 0$$

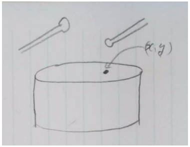
偏微分方程式とは何か

[例 2] 波動方程式



1 次元波動方程式
未知関数：
$u(x,t) =$ 時刻 t での 座標 x の点の変位

$$u_{tt}(x,t) = c u_{xx}(x,t) \quad 0 < x < \ell, \ t > 0$$



2 次元波動方程式
未知関数：
$u(x,y,t) =$ 時刻 t での 座標 (x,y) の点の変位

$$u_{tt}(x,y,t) = c\left(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\right), \\ (x,y) \in D, \ t > 0$$

偏微分方程式とは何か

[例 3] 非圧縮性粘性流体の方程式 (Navier-Stokes 方程式)

未知関数：$\boldsymbol{u} = (u_1(x,y,z,t), u_2(x,y,z,t), u_3(x,y,z,t))$ と $p(x,y,z,t)$

時刻 t での座標 (x,y,z) の点における流体の速度ベクトルと圧力

に対して

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u} \bullet \nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p - \nu\Delta\boldsymbol{u} = \vec{\mathbf{0}} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \end{cases}$$

ただし

ρ：流体の密度　　ν：流体の動粘性係数

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \Delta\boldsymbol{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3),$$

$$\Delta u_i = (u_i)_{xx} + (u_i)_{yy} + (u_i)_{zz},$$

$$\mathrm{grad}p = (p_x, p_y, p_z), \quad \mathrm{div}\boldsymbol{u} = (u_1)_x + (u_2)_y + (u_3)_z$$

偏微分方程式とは何か

[例 4]　電磁場の基礎方程式 (Maxwell の方程式)

未知関数：　$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$：電界

$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$：磁束密度

$\boldsymbol{i}(x,y,z,t)$：電流密度

$\rho(x,y,z,t)$：電荷密度

に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{\varepsilon}\rho \\
\mathrm{div}\boldsymbol{B} &= 0 \\
\mathrm{rot}\boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{B}_t \\
\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{i} + \varepsilon\boldsymbol{E}_t
\end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ にたいして
$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = ((E_3)_y - (E_2)_z, (E_1)_z - (E_3)_x, (E_2)_x - (E_1)_y)$

偏微分方程式の初期値境界値問題の Fourier 級数を用いた解法

以下, 簡単な熱方程式と波動方程式の初期値境界値問題を Fourier 級数を用いて解く方法を述べる。

二階線形常微分方程式の境界値問題

未知関数 X の区間 $(0, \ell)$ で定義された微分方程式に

$X(0) = X(\ell) = 0$ (0-境界条件)

$X'(0) = X'(\ell) = 0$ (Neumann-境界条件)

などの種々の境界条件を付け加えたものを, この微分方程式の境界値問題という.

未知関数 $X(x)$ $(0 < x < \ell,\ \ell > 0)$ の常微分方程式の境界値問題

$$(X_0) \qquad X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

または

$$(X_1) \qquad X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(\ell) = 0$$

が $X(x) \equiv 0$ でない解 X を持つような定数 λ の値をそれぞれの境界値問題の固有値といい, そのときの 0 でない解をその固有値に対応する固有関数という.

二階線形常微分方程式の境界値問題

(X_0), (X_1) の固有値・固有関数

(X_0) の固有値と固有関数は

$$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \ (\text{これを} = \lambda_n \text{ とおく}),$$

$$\sin\frac{n\pi}{\ell}x \ (\text{これを} = X_n(x) \text{ とおく}) \ (n = 1, 2, \cdots).$$

(X_1) の固有値と固有関数は

$$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \ (\text{これを} = \lambda_n \text{ とおく}),$$

$$\cos\frac{n\pi}{\ell}x \ (\text{これを} = X_n(x) \text{ とおく}) \ (n = 1, 2, \cdots).$$

二階線形常微分方程式の境界値問題

[(X_0) の確かめ] $X'' + \lambda X = 0$ の一般解は

(a) $\lambda < 0$ のとき $X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

(b) $\lambda > 0$ のとき $X = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$

であるが境界条件 $X(0) = X(\ell) = 0$ を満たすものは

(a) のときは $C_1 = C_2 = 0$ すなわち $X = 0$ しかない.

(b) のときは

$$X(0) = C_1 = 0,\ X(\ell) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$$

だから $\sqrt{\lambda}\ell = n\pi$, $n = 1, 2, \cdots$ ならば $X(x) \neq 0$ である解が作れる．したがって固有値は $\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $n = 1, 2, \cdots$.

(X_1) も同様である.