本日やること

1. Fourier 級数
   - Fourier 級数とはどういうものか
   - Fourier 級数の計算
   - 半区間展開

Fourier 級数とはどういうものか

復習：n 次元ベクトルの内積・大きさ・正規直交系

[復習：n 次元ベクトルの内積・大きさ・正規直交系]

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

内積：$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$,

大きさ：$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が

$$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\} \text{ は正規直交系} \iff |\boldsymbol{e}_1| = \cdots = |\boldsymbol{e}_n| = 1, \quad \boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = 0 \; (i \neq j)$$

[復習：n 次列ベクトルの直交分解] $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を正規直交系とするとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1)\, \boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_n)\, \boldsymbol{e}_n \cdots (\star 2)$$

Fourier 級数とはどういうものか

復習：Fourier 級数の定義

[関数の内積・ノルム・正規直交関数系] $f,\ g$: $[-\pi, \pi]$ 上の関数に対して

$$\text{内積}: (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx, \quad \text{ノルム}: \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx}$$

$\{\varphi_i\,;\, i = 1, 2, \cdots\}$ は区間 $[-\pi, \pi]$ 上の正規直交関数系

$$\Longleftrightarrow \quad \|\varphi_i\| = 1,\ (i = 1, 2, \cdots), \quad (\varphi_i, \varphi_j) = 0, (i \neq j)$$

[三角関数系]

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\,;\, n = 1, 2, \cdots \right\} \cdots (\star 3)$$

は正規直交関数系である．三角関数系とよぶことにする．

Fourier 級数とはどういうものか

復習：Fourier 級数の定義

[復習：三角関数系による直交分解]

三角関数系 $(\star 3)$ を使って 直交分解をすると

$$f \sim \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx + \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right)$$

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ とおいて整理すると

$$\text{右辺} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

となる。

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

Fourier 級数の定義

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \cdots (1)$$ とおくとき

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \cdots (2)$$

と表す．この右辺の級数を f の Fourier 級数という．

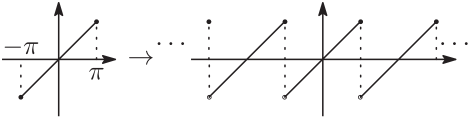
定理：Fourier 級数の収束

関数 f は $[-\pi, \pi]$ 上区分的に連続で，導関数 f' も区分的に連続であるとする．この時 f の Fourier 級数はすべての x で収束し，その和は $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ に等しい．

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

ここで $f(x+0) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x+\varepsilon)$, $f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x-\varepsilon)$ は片側極限であり, f が x で連続ならば $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = f(x)$ である. また $x = \pm\pi$ である場合は, 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数として $-\infty < x < +\infty$ に拡張して考え $f(x+0)$, $f(x-0)$ を計算するものとする.



Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義：一般の区間の場合

Fourier 級数の定義：一般の区間の場合

l を正の定数, f を区間 $[-l,l]$ 上の関数とする.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \cdots (4)$$

となる. ただし

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \cdots (3)$$

収束に関しては 前回の定理と同じことが成り立つ. また $l=\pi$ とすれば 1.2 の場合と一致することに注意せよ.

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義：一般の区間の場合

[確かめ]

変数変換 $x = \dfrac{l}{\pi}\xi$, $(-\pi \leqq \xi \leqq \pi)$ により (3) の a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}\xi\right)\cos(n\xi)\,d\xi$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}\xi\right)\sin(n\xi)\,d\xi$$

だから (2) より

$$f\left(\frac{l}{\pi}\xi\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\xi + b_n\sin n\xi)$$

再び変数変換 $x = \dfrac{l}{\pi}\xi$ で元に戻すと (4) が得られる.

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

[複素数値関数の空間] $f,\ g$: $[-\pi,\pi]$ 上の複素数値関数とする. 内積とノルムを

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx}$$

(ただし $\bar{z}$ は z の共役複素数) で定義すると

$$\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\,;\,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$$

は正規直交関数系となる。

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

複素型 Fourier 級数

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \cdots (6)$$

ただし

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \cdots (5)$$

収束に関しては 前回の定理と同じことが成り立つ.

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

[前回の結果と一致することの確かめ] f が実数値関数の場合は

$$
\begin{aligned}
\text{(6) の右辺} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)e^{-in\xi}\,d\xi e^{inx} + \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)e^{in\xi}\,d\xi e^{-inx}\right\} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\{e^{-in\xi}e^{inx} + e^{in\xi}e^{-inx}\}d\xi \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\{2\cos(n(x-\xi))\}d\xi \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\{\cos nx\cos n\xi + \sin nx\sin n\xi\}d\xi
\end{aligned}
$$

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi \cos nx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi \sin nx \right\}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \}$$

よく使う方法

偶関数・奇関数の定義

$f(x)$ が偶関数 $\iff$ 任意の x に対して $f(-x) = f(x)$

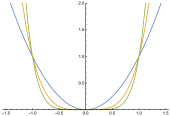
$f(x)$ が奇関数 $\iff$ 任意の x に対して $f(-x) = -f(x)$

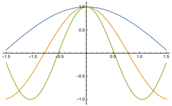
よく使う方法

偶関数・奇関数の性質

$f(x)$ が偶関数のとき

1. グラフは y 軸対称
2. 例：$x^2, x^4, x^6, \cos x, \cos 2x, \cos 3x,$



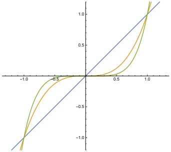


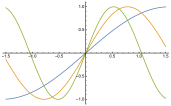
3. $[-a, a]$ での積分：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$f(x)$ が奇関数のとき

1. グラフは原点軸対称
2. 例：$x, x^3, x^5, \sin x, \sin 2x, \sin 3x,$





3. $[-a, a]$ での積分：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

よく使う方法

偶関数 $\times$ 偶関数 $=$ 奇関数 $\times$ 奇関数 $=$ 偶関数,

偶関数 $\times$ 奇関数 $=$ 奇関数.

$\displaystyle\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax$ (a は 0 でない定数),

$\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$ (a は 0 でない定数)

$\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$,

$\cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0, \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

Fourier 級数の計算例

[例 1] $f(x) = x$, $(-\pi < x \leqq \pi)$, $f(-\pi) = \pi$ を $[-\pi, \pi]$ で Fourier 級数に展開する.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0 \quad (x \text{ が奇関数だから})$$

$n \geqq 1$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0 \quad (x\cos nx \text{ が奇関数だから})$$

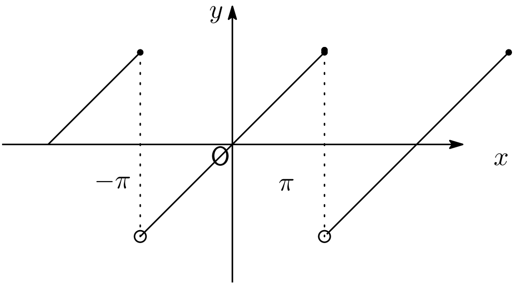
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \quad (x\sin nx \text{ が偶関数だから}) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}(-1)^n \end{aligned}$$

Fourier 級数の計算例

だから

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n}(-1)^n \right) \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots \right)$$

となる．関数 $f(x)$ は図のような周期 2π の関数の 1 周期分であるので $-\pi < x < \pi$ では連続であるが $x = \pm\pi$ では不連続と考えなくてはならない．そのため $-\pi < x < \pi$ では上の $\sim$ は $=$ となるが $x = \pm\pi$ では右辺は 0 となり $=$ とならない．



Fourier 級数の計算例

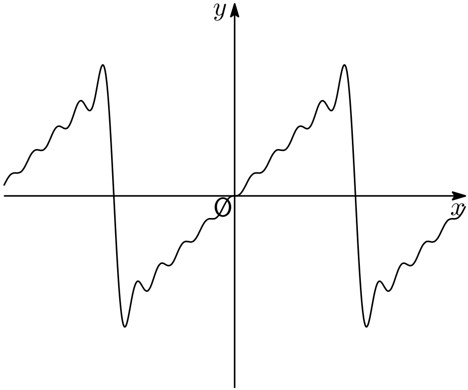


Figure: 第 10 項 までの和

Fourier 級数の計算例

[例 2] $f(x) = |x|$, $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を $[-\pi, \pi]$ で Fourier 級数に展開する.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \pi$$

$n \geqq 1$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \quad (|x|\cos nx \text{ が偶関数だから})$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)$$

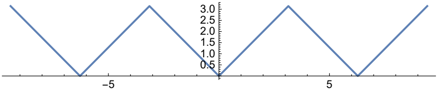
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\,dx = 0 \quad (|x|\sin nx \text{ が奇関数だから})$$

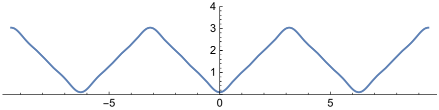
Fourier 級数の計算例

だから

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) \right) \cos nx \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{-4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

となる．



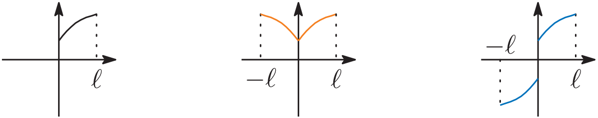


半区間展開

偏微分方程式を解くときなどで 関数を $\sin$ だけ, あるいは $\cos$ だけで展開することが必要になることがある. これを半区間展開というがこの方法を説明する.
$f(x)$ を区間 $(0,\ell]$ で定義された関数とする. このとき

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leqq \ell, \\ \text{任意の数}, & x = 0, \\ f(-x), & -\ell \leqq x < 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leqq \ell, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -\ell \leqq x < 0, \end{cases}$$

で関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ を定義すると



(i) $f_1(x)$, $f_2(x)$ は区間 $[-\ell,\ell]$ で定義された関数で

(ii) $(0,\ell]$ では $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$,

(iii) $f_1(x)$ は偶関数,

(vi) $f_2(x)$ は奇関数.