本日やること

1. Fourier 級数
   - Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数とはどういうものか

2 次元ベクトル空間の正規直交系

[2 次の列ベクトル空間]：2 次の列ベクトル全体の集合。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して

和： $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

スカラー倍： $k\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$

内積 : $\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\theta = x_1 y_1 + x_2 y_2$

大きさ : $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

と定める.

Fourier 級数とはどういうものか

2 次元ベクトル空間の正規直交系

ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が

$$|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = 1, \quad \boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2 = 0$$

をみたすときベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は正規直交系であるという．例えば

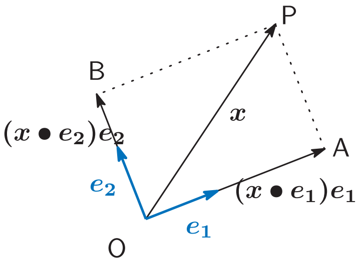
$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\} \cdots$$

などは正規直交系である．

Fourier 級数とはどういうものか

2 次元ベクトル空間の正規直交系

直交分解



2 次の列ベクトル空間において，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を正規直交系とするとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2 \cdots (\star)$$

が成り立つ.

[確かめ] O を原点とし 点 A, B, P を

$$(\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

となるように取る.

Fourier 級数とはどういうものか

2 次元ベクトル空間の正規直交系

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \bullet \boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1) \bullet \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_1 = 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \bullet \boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2) \bullet \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 \bullet \boldsymbol{e}_2 = 0$$

だから OA⊥AP, OB⊥BP. 一方 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は正規直交系だから OA⊥OB. 従って OAPB は長方形となるので $(\star)$ がなりたつ.

$(\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$, $(\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ への正射影とよぶ.

Fourier 級数とはどういうものか

n 次元ベクトル空間の正規直交系

同様に n 次の列ベクトル全体を n 次の列ベクトル空間という．以上のことは n 次元でも成り立つ。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ に対して 内積 $\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y}$ と大きさ $|\boldsymbol{x}|$ を

$$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

で定める．ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が

$$|\boldsymbol{e}_1| = \cdots = |\boldsymbol{e}_n| = 1, \quad \boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = 0 \ (i \neq j)$$

をみたすときベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交系であるという．

Fourier 級数とはどういうものか

n 次元ベクトル空間の正規直交系

直交分解

n 次の列ベクトル空間において, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を正規直交系とするとき任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_1)\, \boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e}_n)\, \boldsymbol{e}_n \cdots (\star 2)$$

が成り立つ.

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

ここまでのことを関数の世界でやってみよう.

関数の集合も足し算とスカラー倍ができてベクトル空間となる。

また, 大きさ・内積にあたる量を定義することもできる。(ただし無限次元でありあつかいの難しいことがある。)

ここでは以下の積分が意味を持たなくてはならないので, 2 乗が積分可能であるような関数のみを考えることにする。また積分の考え方も, 連続でない関数も積分できるようにするため, 高校以来考えた Riemann 積分ではなく Lebesgue 積分というものに切り替える。詳しい説明はしない。

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

f, g を区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数とする. 内積 (f, g) とノルム $\|f\|$ を

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx}$$

で定める. これはベクトルの内積, 大きさと同様の性質を持つ.
関数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ が

$$\|\varphi_i\| = 1, \ (i = 1, 2, \cdots),$$
$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, (i \neq j)$$

をみたすとき関数の組 $\{\varphi_i\,;\, i = 1, 2, \cdots\}$ は区間 $[-\pi, \pi]$ 上の正規直交関数系であるという.

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

[例]

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,;\ n=1,2,\cdots \right\} \cdots (\star 3)$$

は正規直交関数系である.

[確かめ]

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 =$$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \right\|^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \right) =$$

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

正規直交関数系 $(\star 3)$ を使って $(\star 2)$ にあたることをやってみよう。

$$
\begin{aligned}
(\star 2)\ \text{の右辺の和} = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right. \\
&\qquad \left. + \left(f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right)
\end{aligned}
$$

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$ とおくと

$$
= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)
$$

となる。

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

Fourier 級数の定義

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ とおくとき

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cdots (2)$$

と表す．この右辺の級数を f の **Fourier 級数**という．

定理：Fourier 級数の収束

関数 f は $[-\pi, \pi]$ 上区分的に連続で，導関数 f' も区分的に連続であるとする．この時 f の Fourier 級数はすべての x で収束し，その和は $\dfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ に等しい．

Fourier 級数とはどういうものか

Fourier 級数の定義

ここで $f(x+0) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x+\varepsilon)$, $f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x-\varepsilon)$ は片側極限であり, f が x で連続ならば $\dfrac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = f(x)$ である. また $x = \pm\pi$ である場合は, 関数 $f(x)$ を周期 2π の関数として $-\infty < x < +\infty$ に拡張して考え $f(x+0)$, $f(x-0)$ を計算するものとする.