本日やること

1. Laplace 変換の微分方程式の解法への応用
   - 定数係数連立一階線形常微分方程式
     - 一般理論
     - $\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

定数係数連立一階線形常微分方程式

復習：定数係数連立一階線形常微分方程式の初期値問題　解法の一般理論

定数係数連立一階線形常微分方程式の初期値問題

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1, c_2$：定数，$x(t)$，$y(t)$：未知関数，$f(t), g(t)$：既知関数 のとき，

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}\,x(t) + a_{12}\,y(t) + f(t), & x(0) = c_1, \\ y'(t) = a_{21}\,x(t) + a_{22}\,y(t) + g(t), & y(0) = c_2 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

を 定数係数連立一階線形常微分方程式の初期値問題 という。

(P) をベクトル関数を用いて単独方程式に書き直し、通常の関数の初期値問題と同様にラプラス変換を用いて解く。

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

定数係数連立一階線形常微分方程式

$$\vec{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{f}}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定め, ベクトル関数 $\vec{\boldsymbol{y}}$ の導 (ベクトル) 関数を

$$\vec{\boldsymbol{y}}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

と定めると (P) は

$$\vec{\boldsymbol{y}}'(t) = \boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{y}}(t) + \vec{\boldsymbol{f}}(t), \quad \vec{\boldsymbol{y}}(0) = \vec{\boldsymbol{c}} \tag{P'}$$

となる.

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

ベクトル関数・行列関数のラプラス変換

ベクトル関数・行列関数のラプラス変換の定義

$$\text{行列関数 } \boldsymbol{V}(t) = \begin{bmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{ベクトル関数 } \vec{\boldsymbol{v}}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

の Laplace 変換 $L[\boldsymbol{V}](s)$, $L[\vec{\boldsymbol{v}}](s)$ を

$$L[\boldsymbol{V}](s) = \begin{bmatrix} L[v_{11}](s) & L[v_{12}](s) \\ L[v_{21}](s) & L[v_{22}](s) \end{bmatrix}, \qquad L[\vec{\boldsymbol{v}}](s) = \begin{bmatrix} L[v_1](s) \\ L[v_2](s) \end{bmatrix},$$

で定める． 要するに成分ごとに Laplace 変換するものと定めるわけである．
Laplace 逆変換も同様に定める．

通常の関数のラプラス変換と同様に線形法則、微分法則、合成法則が成り立つ。

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

定数係数連立一階線形常微分方程式

復習の復習： 1 階単独の場合 $\begin{cases} y' = ay + f(t), \\ y(0) = c. \end{cases}$ の解法.

両辺ラプラス変換して微分法則を使い $L(y) = Y$, $L(f) = F$ とおくと

$$(s-a)Y = c + F(s)$$

両辺 $s-a$ でわって

$$Y = \frac{c}{s-a} + \frac{1}{s-a} \times F(s)$$

両辺逆ラプラス変換して合成法則を使うと

$$y = L^{-1}\left(\frac{c}{s-a}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s-a} \times F(s)\right) = ce^{at} + (e^{at} * f(t)) \cdots (\star)$$

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

定数係数連立一階線形常微分方程式

同様の方法で (P') $\begin{cases} \vec{\boldsymbol{y}}\,'(t) = \boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{y}}(t) + \vec{\boldsymbol{f}}(t), \\ \vec{\boldsymbol{y}}(0) = \vec{\boldsymbol{c}}. \end{cases}$ を解こう.

両辺ラプラス変換して 微分法則を使い $L(\vec{\boldsymbol{y}}) = \vec{\boldsymbol{Y}}$, $L(\vec{\boldsymbol{f}}) = \boldsymbol{F}$ とおくと

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{Y}} = \vec{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{F}(s)$$

両辺に $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ をかけて

$$\vec{\boldsymbol{Y}} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\vec{\boldsymbol{c}} + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}F(s)$$

両辺逆ラプラス変換して合成法則を使うと

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{y}} &= L^{-1}\left((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right)\vec{\boldsymbol{c}} + L^{-1}\left((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}F(s)\right) \\ &= L^{-1}\left((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right)\vec{\boldsymbol{c}} + L^{-1}\left((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right) * L^{-1}\left(\boldsymbol{F}(s)\right) \cdots (\star 2) \end{aligned}$$

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

定数係数連立一階線形常微分方程式

$(\star)$, $(\star 2)$ を比較して

$$L^{-1}\left((s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right)=e^{t\boldsymbol{A}}$$

と書くことにする.

定理：定数係数連立一階線形常微分方程式のラプラス変換による解法

(P') の解は

$$\vec{\boldsymbol{y}}(t)=e^{t\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{c}}+e^{t\boldsymbol{A}}*\vec{\boldsymbol{f}}(t)$$

と書ける.

積分で書くと $e^{t\boldsymbol{A}}*\vec{\boldsymbol{f}}(t)=\displaystyle\int_0^t e^{(t-\sigma)\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{f}}(\sigma)\,d\sigma$ ただしベクトル関数の積分は

$$\int\begin{pmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}\int v_1(t)\,dt\\ \int v_2(t)\,dt\end{pmatrix}$$ と考える。

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

定数係数連立一階線形常微分方程式

1. 未知関数 n 個, 方程式 n 個の場合も同様のことが成り立つ。
2. 「係数行列 $\boldsymbol{A}$ がちょうど未知関数と同じ数の, 一次独立な固有ベクトルを持つ」場合には, もう少し見やすくなる。

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

連立一階方程式: $\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合

復習：行列の固有値・固有ベクトル

$\boldsymbol{A}$ ：実数成分の n 次正方行列

λ：複素数

$\boldsymbol{u}$：n 次列ベクトル

に対して

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$$

のとき, λ を $\boldsymbol{A}$ の固有値, $\boldsymbol{u}$ を λ に対する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルという。

$\boldsymbol{A}$ が実数成分であっても λ が複素数になることがある。 そのときは $\boldsymbol{u}$ の成分も複素数になる。

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

連立一階方程式: $\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合

復習：固有方程式

固有値 λ は固有方程式

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0, \quad (\boldsymbol{I} \text{ は単位行列})$$

の解である。

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

連立一階方程式: $\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合

復習：行列の対角化

$\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を持つ場合, 対応する固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とし

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$$

とおくと $\boldsymbol{P}$ は正則行列となり

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

これを行列 $\boldsymbol{A}$ の対角化という。

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

連立一階方程式: $\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合

$\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合は, 状態推移行列 $e^{t\boldsymbol{A}}$ が著しく見やすくなる. $n = 2$ で説明する。

1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合の状態推移行列

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $\boldsymbol{A}$ の 固有ベクトル

λ, μ : 対応する固有値

とし $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ は 1 次独立であるとする. この時状態推移行列 $e^{t\boldsymbol{A}}$ は

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

となる.

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

連立一階方程式: $\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合

[確かめ]　$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ とおき $\boldsymbol{A}$ の対角化を使うと $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
左から $\boldsymbol{P}$, 右から $\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけると

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}$$

したがって

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} s-\lambda & 0 \\ 0 & s-\mu \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}$$

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ を使って

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} s-\lambda & 0 \\ 0 & s-\mu \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \frac{1}{s-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-\mu} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}$$

Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

連立一階方程式: $\boldsymbol{A}$ が 1 次独立な n 個の固有ベクトルを持つ場合

$$
\begin{aligned}
e^{t\boldsymbol{A}} &= L^{-1}\left((s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right) = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} L^{-1}\left(\frac{1}{s-\lambda}\right) & 0 \\ 0 & L^{-1}\left(\frac{1}{s-\mu}\right) \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}
\end{aligned}
$$