

# 本日やること

- ① Laplace 変換の微分方程式の解法への応用
  - 定数係数連立一階線形常微分方程式

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

## 定数係数連立一階線形常微分方程式

[高階単独方程式の 1 階連立方程式への書き直し]

連立でない微分方程式 (これを単独方程式という) で 2 階以上のものを 1 階の連立微分方程式に書き直すことができる.

[例]

$$(\star) \begin{cases} x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 3, \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\star\star) \begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 3 \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

連立であっても 1 階である微分方程式は統一的な扱いが可能で理論的に見通しがよくなる.

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

## 定数係数連立一階線形常微分方程式

[(★★) のラプラス変換を用いた解法の例]

微分方程式をラプラス変換して  $L(x) = X$ ,  $L(y) = Y$  とおき微分法則を使う

$$sX - x(0) = Y, \quad sY - y(0) = 3X + 2Y + L(3)$$

初期条件を代入して整理

$$sX - Y = 1, \quad 3X - (s - 2)Y = -\frac{3}{s}$$

$X, Y$  について解き部分分数分解

$$X = \frac{s^2 - 2s + 3}{s(s^2 - 2s - 3)} = -\frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-3}$$

$$Y = \frac{6}{s^2 - 2s - 3} = -\frac{3}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{s-3}$$

ラプラス逆変換すると

$$x = -1 + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}, \quad y = -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} \quad \text{これが解}$$

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

## 定数係数連立一階線形常微分方程式

### [解法の一般理論]

簡単のため 2 元 2 連立の場合で述べるが、その他の場合も同様である。

定数係数連立一階線形常微分方程式の初期値問題

$a, b, c, d, c_1, c_2$  : 定数,  $x(t), y(t)$  : 未知関数,  $f(t), g(t)$  : 既知関数 のとき,

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11} x(t) + a_{12} y(t) + f(t), & x(0) = c_1, \\ y'(t) = a_{21} x(t) + a_{22} y(t) + g(t), & y(0) = c_2 \end{cases} \quad (\text{P})$$

を **定数係数連立一階線形常微分方程式の初期値問題** という。

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

## 定数係数連立一階線形常微分方程式

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

と定めると (P) は

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{f}(t), \dots (\star) \quad \vec{y}(0) = \vec{c} \dots (\star 2) \quad (P)$$

となる.

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

## ベクトル関数・行列関数のラプラス変換

ベクトル関数・行列関数のラプラス変換の定義

$$\text{行列関数 } \mathbf{V}(t) = \begin{bmatrix} v_{11}(t) & v_{12}(t) \\ v_{21}(t) & v_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{ベクトル関数 } \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

の Laplace 変換  $L[\mathbf{V}](s)$ ,  $L[\mathbf{v}](s)$  を

$$L[\mathbf{V}](s) = \begin{bmatrix} L[v_{11}](s) & L[v_{12}](s) \\ L[v_{21}](s) & L[v_{22}](s) \end{bmatrix}, \quad L[\mathbf{v}](s) = \begin{bmatrix} L[v_1](s) \\ L[v_2](s) \end{bmatrix},$$

で定める。要するに成分ごとに Laplace 変換するものと定めるわけである。  
Laplace 逆変換も同様に定める。

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

ベクトル関数・行列関数のラプラス変換

## 線型法則

$A_1, A_2$  を 2 行 2 列の定行列,  $B_1(s), B_2(s)$  を 2 行 2 列の行列関数,  $\vec{c}_1, \vec{c}_2$  を 2 次の定ベクトル,  $v_1(t), v_2(t)$  を 2 次のベクトル関数とすると,

$$(i) \quad L[A_1 v_1(t) + A_2 v_2(t)] = A_1 L[v_1(t)] + A_2 L[v_2(t)],$$

$$(ii) \quad L^{-1}[B_1(s)\vec{c}_1 + B_2(s)\vec{c}_2] = L^{-1}[B_1(s)]\vec{c}_1 + L^{-1}[B_2(s)]\vec{c}_2.$$

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

ベクトル関数・行列関数のラプラス変換

微分法則

$$L[\vec{y}'](s) = sL[\vec{y}](s) - \vec{y}(0)$$

[確かめ]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= L \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(x'(t)) \\ L(y'(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sL(x) - x(0) \\ sL(y) - y(0) \end{pmatrix} \\ &= s \begin{pmatrix} L(x) \\ L(y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \text{右辺} \end{aligned}$$



# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

ベクトル関数・行列関数のラプラス変換

合成法則

$B(s)$  を 2 行 2 列の行列関数,  $F(s)$  を 2 次のベクトル関数とすると,

$$L^{-1}[B(s)F(s)](t) = \int_0^t L^{-1}[B](t - \sigma)L^{-1}[F](\sigma) d\sigma.$$

この右辺を  $L^{-1}[B] * L^{-1}[F]$  と書く.

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

## 定数係数連立一階線形常微分方程式

定理：定数係数連立一階線形常微分方程式のラプラス変換による解法

(P) の解は

$$\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{c} + \int_0^t e^{(t-\sigma)A} \vec{f}(\sigma) d\sigma$$

と書ける。ただし  $e^{tA}$  は **状態推移行列** とよばれ

$$e^{tA} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

で定められる。 $I$  は単位行列である。

# Laplace 変換の微分方程式の解法への応用

## 定数係数連立一階線形常微分方程式

[確かめ.]  $(*)$  の両辺をラプラス変換,  $L[\vec{y}(t)] = \vec{Y}(s)$ ,  $L[\vec{f}(t)] = \mathbf{F}(s)$  とおくと

$$L[\vec{y}'(t)] = \mathbf{A}\vec{Y}(s) + \mathbf{F}(s)$$

微分法則を適用し  $(*)2$  を代入し整理

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{Y}(s) = \vec{c} + \mathbf{F}(s)$$

逆行列  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  を両辺にかけると

$$\vec{Y}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\vec{c} + \mathbf{F}(s)),$$

さらにこの両辺をラプラス逆変換すると

$$\vec{y}(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\vec{c} + \mathbf{F}(s))] = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\vec{c} + L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}(s)]$$

となるがこれが定理の結論である.