本日やること

1. Laplace 変換とラプラス逆変換
   - 復習
   - 合成積と合成法則

ラプラス変換とラプラス逆変換

復習

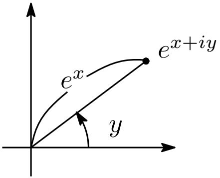
導関数のラプラス変換 (微分法則)

$$L(f'(t)) = s\,L(f(t)) - f(0), \quad (s \text{ 十分大で}).$$
$$L(f''(t)) = s^2\,L(f(t)) - s\,f(0) - f'(0), \quad (s \text{ 十分大で}).$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

復習

復習：複素指数関数



$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (\ x, y \in \mathbb{R})$$

復習：指数関数のラプラス変換

a を複素数の定数とするとき

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad (s > \mathrm{Re}\, a \text{ で存在する}) \quad \text{特に} \quad L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at} \quad \text{特に} \ L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

復習

三角関数のラプラス変換

a, ω を実数の定数とするとき

(1) $L(\cos\omega t)(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ ($s > 0$ のとき存在).

(2) $L(\sin\omega t)(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ($s > 0$ のとき存在).

(3) $L(e^{at}\cos\omega t)(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ ($s > a$ のとき存在)

(4) $L(e^{at}\sin\omega t)(s) = \dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ ($s > a$ のとき存在).

(5) $L^{-1}\left(\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right)(t) = e^{at}\cos\omega t$

(6) $L^{-1}\left(\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right)(t) = e^{at}\sin\omega t$

ラプラス変換とラプラス逆変換

復習

復習：部分分数分解

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad P(s), Q(s) : s \text{ の実数係数の多項式}$$

の部分分数として

分母が因数 $s-\alpha$ (α は実数) を持つとき　$\dfrac{A}{s-\alpha}$,

分母が因数 s^2+bs+c　$(b^2-4c<0)$ を持つとき　$\dfrac{Bs+C}{s^2+bs+c}$

がとれる。ただし未定係数 A, B, C は実数の定数.

ラプラス変換とラプラス逆変換

合成積と合成法則

合成積の定義

二つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ の 合成積 $(f*g)(t)$ を

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\sigma)g(\sigma)\,d\sigma$$

で定める.

合成積の性質：合成法則

(i) $L(f*g)(s) = L(f)(s)\,L(g)(s)$

(ii) $L^{-1}(F(s)G(s))(t) = (L^{-1}(F) * L^{-1}(G))(t)$

ラプラス変換とラプラス逆変換

合成積と合成法則

[(i) の確かめ]

$$\text{右辺} = \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv\right)$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)\,dudv$$

変数変換 $\begin{cases} u+v=t \\ v=\sigma \end{cases}$ $\left(\text{いいかえると} \begin{cases} u=t-\sigma \\ v=\sigma \end{cases}\right)$ とすると

この変換の jacobian は $J = \begin{vmatrix} u_t & u_\sigma \\ v_t & v_\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ だから $dudv = d\sigma dt$

としてよいので

$$\text{右辺} = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\sigma)g(\sigma)\,d\sigma dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-\sigma)g(\sigma)\,d\sigma\right)dt = \text{左辺}$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

[例題]（強制振動） ω : 実数の定数, $f(t)$: 既知関数

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

両辺ラプラス変換して $L(y) = Y$, $L(f) = F$ とおくと

$$(s^2 + \omega^2)Y = F(s)$$

整理して

$$Y = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)} \times F(s)$$

両辺逆ラプラス変換して合成法則を使うと

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + \omega^2)}\right) * f(t) = \frac{1}{\omega}(\sin\omega t * f(t)) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$