本日やること

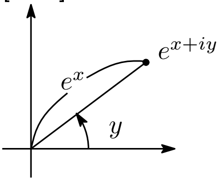
1. Laplace 変換とラプラス逆変換
   - 復習:複素指数関数
   - 部分分数分解の方法

ラプラス変換とラプラス逆変換

復習：複素指数関数

復習：複素指数関数

[定義]



$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (\ x, y \in \mathbb{R})$$

[導関数・原始関数]　$z = x + iy$ は複素定数，t は実数の変数とするとき

$$\frac{d}{dt} e^{zt} = z e^{zt}, \qquad \int e^{zt}\, dt = \frac{1}{z} e^{zt} \quad \text{(ただし } z \neq 0 \text{)}$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素指数関数のラプラス変換

復習：複素指数関数のラプラス変換

a, b を実数の定数とするとき

$$L(e^{(a+ib)t}) = \frac{1}{s-(a+ib)} \quad (s > a \text{ で存在する})$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

移動法則.

ラプラス変換の性質：移動法則.

a を実数の定数とするとき

$$L(f(t)) = F(s) \quad (s > \alpha \text{ で存在})$$
$$\Rightarrow \; L(e^{at} f(t)) = F(s-a) \quad (s > \alpha + a \text{ で存在}) \cdots (\star)$$

[確かめ]　仮定より

$$\int e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

だから s を $s-a$ で置きかえて

$$(\star) \text{ の左辺} = \int e^{-st} e^{at} f(t)\, dt = \int e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

三角関数のラプラス変換

三角関数のラプラス変換

a, ω を実数の定数とするとき

$$(1)\quad L(\cos\omega t)(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2}\quad (s>0 \text{ のとき存在}).$$

$$(2)\quad L(\sin\omega t)(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\quad (s>0 \text{ のとき存在}).$$

$$(3)\quad L(e^{at}\cos\omega t)(s)=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\quad (s>a \text{ のとき存在})$$

$$(4)\quad L(e^{at}\sin\omega t)(s)=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\quad (s>a \text{ のとき存在}).$$

$$(5)\quad L^{-1}\left(\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right)(t)=e^{at}\cos\omega t$$

$$(6)\quad L^{-1}\left(\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right)(t)=e^{at}\sin\omega t$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

三角関数のラプラス変換

[確かめ]：

$$L(e^{(a+i\omega)t}) = \frac{1}{s-(a+i\omega)}$$

であった．両辺を別々に計算する．

$$\text{左辺} = L(e^{at}(\cos\omega t + i\sin\omega t)) = L(e^{at}\cos\omega t) + iL(e^{at}\sin\omega t),$$

$$\text{右辺} = \frac{s-(a-i\omega)}{(s-(a+i\omega))(s-(a-i\omega))} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

両辺の実部を比較して (3), 虚部を比較して (4) が分かる．その他は明らか.

ラプラス変換とラプラス逆変換

部分分数分解の方法

[目標：**部分分数分解**の方法]

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad P(s), Q(s) : s \text{ の実数係数の多項式}$$

を部分分数に分解する方法を述べる。

ラプラス変換とラプラス逆変換

現れる部分分数

[Step 1. 分母の因数分解]

分母 $Q(s)$ を

$$Q(s) = a(s-\alpha_1)^{m_1}\cdots(s-\alpha_k)^{m_k}$$

の形に因数分解することができる。ただし α_i が複素数になる場合があることに注意しよう．このとき右辺に実数しか現れないようにすると，

$$x^2+bx+c \quad (b^2-4c<0)$$

のような二次式が現れる．

[例]

$$s^3+s^2-2=(s-1)\left(s^2+2s+2\right)=(s-1)(s+1-i)(s+1+i)$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

現れる部分分数

[Step 2. 現れる部分分数の形の決定] $F(s)$ は

- 重複度 1 の因数 $s-\alpha$ を持つとき $\dfrac{A}{s-\alpha}$,
- 重複度 m の因数 $s-\alpha$ を持つとき $\dfrac{A_1}{s-\alpha}+\cdots+\dfrac{A_m}{(s-\alpha)^m}$

の和の形に変形することができることが知られている. (証明は省略.) ただし A, $A_1,\cdots,A_m$ は複素数の定数である. これを未定係数という.

[例.] $$\frac{s+1}{(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}$$

$$\frac{s+1}{(s-1)(s-2)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}$$

$$\frac{s+1}{(s-1)(s+1-i)(s+1+i)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{s+1-i}+\frac{C}{s+1+i}$$

いづれの場合にも 部分分数の数と分母の次数は一致する.

ラプラス変換とラプラス逆変換

部分分数の係数の決定

[Step 3. 未定係数の決定]
[その 1. 係数比較による方法]

$$\frac{8}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2i} + \frac{C}{s+2i} \quad (s\text{ に関する恒等式})$$

となるように定数 A, B, C を決めてみよう．右辺を通分して和をとると

$$\text{右辺} = \frac{A(s^2+4) + Bs(s+2i) + Cs(s-2i)}{s(s^2+4)}$$

だから両辺の分子どうしを比べると

$$8 = A(s^2+4) + Bs(s+2i) + Cs(s-2i) = (A+B+C)\,s^2 + 2i(B-C)\,s + 4A$$

ところで 「二つの 多項式が恒等的に等しい $\iff$ 同次の項の係数がそれぞれ等しい」 だから

$$A+B+C=0, \quad B-C=0, \quad 4A=8$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

部分分数の係数の決定

でなくてはならない．この A, B, C の連立方程式を解くと $A = 2$, $B = -1$, $C = -1$. したがって

$$\frac{8}{s(s^2+4)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s-2i} - \frac{1}{s+2i}.$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

部分分数の係数の決定

[その 2．Heaviside 展開定理による方法]

Heaviside 展開定理

(1) $s-\alpha$ が分母 $Q(s)$ の重複度 1 の因数であるとき，部分分数 $\dfrac{A}{s-\alpha}$ の係数 A は

$$A = \left[(s-\alpha)F(s)\right]\Big|_{s=\alpha}$$

(2) 同様に $s-\alpha$ が分母 $Q(s)$ の重複度 m の因数であるとき，部分分数

$$\frac{A_1}{s-\alpha} + \cdots + \frac{A_m}{(s-\alpha)^m}$$

の係数 $A_1, \cdots, A_m$ は

$$A_{m-k} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{ds^k}\left[(s-\alpha)^m F(s)\right]\Big|_{s=\alpha} \qquad k = 0, 1, \cdots, m-1,$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

部分分数の係数の決定

[例]

$$\frac{s+1}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

の係数 A, B, C を決めたい.
両辺に $s-1$ をかけると

$$\frac{s+1}{(s-2)^2} = A + \frac{B(s-1)}{s-2} + \frac{C(s-1)}{(s-2)^2}$$

となる．ここで s に 1 を代入すると

$$\text{左辺} = \left.\frac{s+1}{(s-2)^2}\right|_{s=1} = 2, \qquad \text{右辺} = A + 0 + 0 = A$$

だから $A = 2$ であることがわかる．これが (1) の考え方である.

ラプラス変換とラプラス逆変換

部分分数の係数の決定

両辺に $(s-2)^2$ をかけると

$$\frac{s+1}{s-1} = \frac{A(s-2)^2}{s-1} + B(s-2) + C \cdots (*)$$

となる．ここで s に 2 を代入するとさっきと同様に

$$C = \left.\frac{s+1}{s-1}\right|_{s=2} = 3$$

であることがわかる．さらに (*) を s で微分すると

$$\frac{-2}{(s-1)^2} = \frac{As(s-2)}{(s-1)^2} + B.$$

ここで s に 2 を代入すると

$$B = \left.\frac{-2}{(s-1)^2}\right|_{s=2} = -2$$

であることがわかる．これが (2) の考え方である．

ラプラス変換とラプラス逆変換

分母の因数分解に複素数が現れる場合.

[実数係数のみで分解する方法]
分母の因数分解に複素数が現れる場合, 分母が 1 次式となるような部分分数分解には複素数が現れるが, 適当に組み合わせて和をとることにより, 部分分数として

$$\frac{As+B}{s^2+bs+c}, \quad (A, B, b, c \text{ は実数の定数})$$

形のものをとることができる. このことを説明しよう.

ラプラス変換とラプラス逆変換

分母の因数分解に複素数が現れる場合.

複素数解の性質

係数が実数である n 次方程式 $P(s)=0$ が複素数の解 α を持つとき, 共役複素数 $\bar{\alpha}$ も同じ方程式の解になりその重複度も一致する.

[確かめ]　Taylor 展開により

$$P(s)=P(\alpha)+P'(\alpha)(s-\alpha)+\frac{P''(\alpha)}{2}(s-\alpha)^2+\cdots$$

だから

$s=\alpha$ は $P(s)=0$ の k 重解 $\Leftrightarrow$ $P(\alpha)=\cdots=P^{(k)}(\alpha)=0,\ P^{(k+1)}(\alpha)\neq 0,$

一方 $P(s)$, $P'(S),\cdots$ は実数係数だから

$$P(\bar{\alpha})=\overline{P(\alpha)},\ P'(\bar{\alpha})=\overline{P'(\alpha)},\cdots.$$

であることがわかる. この 2 つのことから

$s=\alpha$ は $P(s)=0$ の k 重解 $\Leftrightarrow$ $s=\bar{\alpha}$ は $P(s)=0$ の k 重解

ラプラス変換とラプラス逆変換

分母の因数分解に複素数が現れる場合.

[例]　$s^3+s^2-2=0$ の解は 1, $-1+i$, $-1-i$ だから

$$\frac{5}{s^3+s^2-2}=\frac{5}{(s+1-i)(s+1+i)(s-1)}=\frac{A}{s+1-i}+\frac{B}{s+1+i}+\frac{C}{s-1}.$$

ここで $\dfrac{-\frac{1}{2}+i}{s+1-i}$ と $\dfrac{-\frac{1}{2}-i}{s+1+i}$ は (s は実数変数だから) 互いに共役となっているのでこれらの和をとることにより

$$\frac{5}{s^3+s^2-2}=\frac{-s-3}{s^2+2s+2}+\frac{1}{s-1}$$

のように係数を実数だけにすることができる. (いつでも必ずできることがわかっている。) だからはじめから

$$\frac{5}{s^3+s^2-2}=\frac{As+B}{s^2+2s+2}+\frac{C}{s-1},\quad (A,B,C \text{ は実数の定数})$$

となるとして計算してよい.