本日やること

- 複素数
- 回し伸ばしの原理
- 複素指数関数のラプラス変換

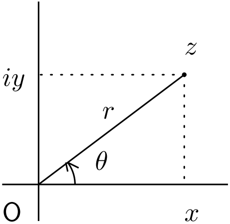
複素数と複素指数関数を使うと見通しがよくなるので.

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素数

虚数単位 i : $i^2 = -1$

複素数 : $x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$



複素平面では 直角座標 (x, y) 点 P に 複素数 $z = x + iy$ が対応.

z の絶対値 $|z|$ を $|z| = r$ と定める

z の偏角 $\arg z$ を $\arg z = \theta$ と定める

z の実部 (real part) **Re**z を x と定める,

z の虚部 (imaginary part) **Im**z を y と定める,

極形式 : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

3. ラプラス変換とラプラス逆変換

複素数：回し伸ばしの原理

回し伸ばしの原理

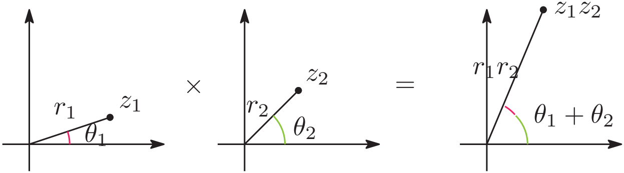
2 つの複素数 z_1, z_2 の積 $z_1 z_2$, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は

(i) $\arg\, z_1 z_2 = \arg\, z_1 + \arg\, z_2$, $\quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(ii) $\arg\, \dfrac{z_1}{z_2} = \arg\, z_1 - \arg\, z_2$, $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

によって決まる.

(i) は

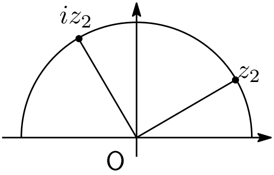


ということ

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素数：回し伸ばしの原理

[(i) の確かめ]　$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とする.
(簡単のため $0 \leqq \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。)



(Step 1) $z_1 = i$ の場合.

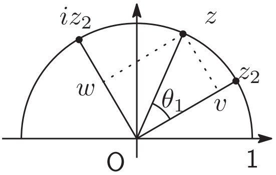
$$z_2 = x_2 + iy_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{i}z_2 = -y_2 + ix_2$$

だから iz_2 は z_2 を左周りに角 $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもの.

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素数：回し伸ばしの原理

(Step 2) $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$, $z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ の場合.



$z = z_2$ を角 θ_1 回転した複素数

$v = z$ を線分 Oz_2 に射影した複素数

$w = z$ を線分 Oiz_2 に射影した複素数

とすると $Oz = 1$ だから $\sin\theta_1$, $\cos\theta_1$ の定義より

$v = (\cos\theta_1)z_2$: z_2 を偏角を変えずに絶対値を $\cos\theta_1$ 倍したもの,

$w = (\sin\theta_1)(iz_2)$: z_2 を角 $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して絶対値を $\sin\theta_1$ 倍したもの,

だから

$$z = v + w = (\cos\theta_1)z_2 + (\sin\theta_1)(iz_2) = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2 = z_1 z_2$$

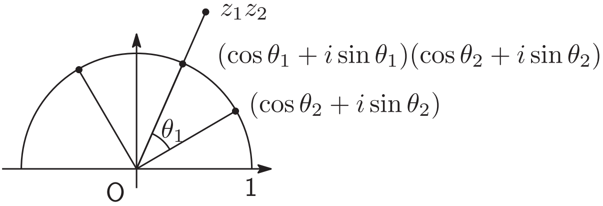
まとめて

$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2$ は z_2 を 角 θ_1 だけ回転したもの.

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素数：回し伸ばしの原理

(Step 3)　$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ の場合.

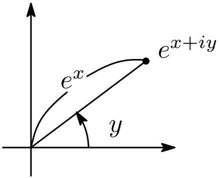


$z_1 z_2$ は $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ と偏角が同じで絶対値を $r_1 r_2$ 倍したものだから結局 (i) がわかった.

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素指数関数

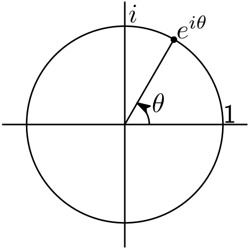
複素指数関数の定義



指数関数 e^x を拡張して複素数 $x+iy$ に対して**複素指数関数** e^{x+iy} を

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

で定める。



とくに θ を実数とするとき

Euler の公式 ： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad \arg e^{i\theta} = \theta$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素指数関数

複素指数関数の性質

[複素指数法則]　z_1, z_2：複素数

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

[複素指数関数の導関数]　z を複素数の定数, t を実数の変数とするとき, 複素数値をとる関数 $f(t) = e^{zt}$ の導関数は

$$\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$$

ただし複素数値をとる関数の導関数は i を通常の定数と同じように扱って計算するものとする。

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素指数関数

複素指数関数の性質

[複素指数関数の原始関数]　z を 0 でない複素数の定数, t を実数の変数とするとき, 複素数値をとる関数 $f(t) = e^{zt}$ の原始関数は

$$\int e^{zt}\, dt = \frac{1}{z} e^{zt} + C$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

複素指数関数のラプラス変換

複素指数関数のラプラス変換

a, b を実数の定数とするとき

$$L(e^{(a+ib)t}) = \frac{1}{s-(a+ib)} \quad (s > a \text{ で存在する})$$

確かめ：

$$\text{左辺} = \int_0^\infty e^{-st}e^{(a+ib)t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-(a+ib))t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{-(s-(a+ib))}e^{-(s-(a+ib))t}\right]_0^\infty$$

ここで $s > a$ とすると $t \to \infty$ とするとき

$$\left|e^{-(s-(a+ib))t}\right| = \left|e^{-(s-a)t+ibt}\right| = \left|e^{-(s-a)t}\right|\left|e^{ibt}\right| = e^{-(s-a)t} \to e^{-\infty} = 0$$

となることから 左辺 $=$ 右辺 であることが分かる.