ラプラス変換とラプラス逆変換

復習

ラプラス変換 L の定義

$f(t)$: $t > 0$ の関数. s : 実数 とするとき

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

ラプラス逆変換 L^{-1} の定義

$$L^{-1}(F(s)) = f(t) \iff L(f(t)) = F(s)$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス変換の性質

線形性

関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$,$F_1(s)$, $F_2(s)$ と定数 c_1, c_2 に対して

$$
\begin{aligned}
&L(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1\, L(f_1(t)) + c_2\, L(f_2(t)),\\
&L^{-1}\,(c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)) = c_1\, L^{-1}(F_1(s)) + c_2\, L^{-1}(F_2(s)).
\end{aligned}
$$

[確かめ]:

ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス変換の性質

指数関数のラプラス変換

a を定数とするとき

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad (s > \mathrm{Re}\, a \text{ で存在する}) \quad \text{特に} \quad L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at} \quad \text{特に} \quad L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

[確かめ]:

ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス変換の性質

導関数のラプラス変換 (微分法則)

$$L(f'(t)) = s\,L(f(t)) - f(0), \quad (s \text{ 十分大で}).$$
$$L(f''(t)) = s^2\,L(f(t)) - s\,f(0) - f'(0), \quad (s \text{ 十分大で}).$$

[確かめ]:

ラプラス変換とラプラス逆変換

微分方程式の解法への応用

定数係数線型微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 6y(t) = -6e^t, & (1) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 & (2) \end{cases}$$

をラプラス変換を用いて解く.

(Step 1) (1) の両辺をラプラス変換すると

$$L(y''(t)) + L(y'(t)) - 6L(y(t)) = -6L(e^t).$$

ここで

$$L(e^t) = \frac{1}{s-1}$$

を使うと

$$L(y''(t)) + L(y'(t)) - 6L(y(t)) = \frac{-6}{s-1}.$$

ラプラス変換とラプラス逆変換

微分方程式の解法への応用

(Step 2) **微分法則**

$$L(y''(t)) = s^2 L(y(t)) - s\,y(0) - y'(0), \quad L(y'(t)) = s\,L(y(t)) - y(0),$$

を使い $L(y(t)) = Y(s)$ とおいて整理すると

$$(s^2 + s - 6)Y(s) - sy(0) - y'(0) - y(0) = \frac{-6}{s-1}.$$

初期条件 (2) を代入して整理すると

$$(s^2 + s - 6)Y(s) = 1 + \frac{-6}{s-1} = \frac{s-7}{s-1}$$

が得られる．すると Y に関する代数方程式となる．

ラプラス変換とラプラス逆変換

微分方程式の解法への応用

(Step 3) **得られた代数方程式を整理して $Y(s)$ について解き**

$$Y(s) = \frac{s-7}{(s-1)(s^2+s-6)} = \frac{s-7}{(s-1)(s-2)(s+3)} \cdots (\star)$$

さらに右辺を部分分数分解して

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} \cdots (\star\star)$$

の形に整理する.

ラプラス変換とラプラス逆変換

微分方程式の解法への応用

部分分数分解の方法 (Heaviside の展開定理):

$$\frac{s-7}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}$$

が s の恒等式となる定数 A, B, C が必ずある。Heaviside の展開定理によりこの値を決定することができる。
両辺を $s-1$ 倍して $s=1$ を代入すると

$$\left.\frac{s-7}{(s-2)(s+3)}\right|_{s=1} = A + \left.\frac{B(s-1)}{s-2}\right|_{s=1} + \left.\frac{C(s-1)}{s+3}\right|_{s=1} = A$$

だから $A = \dfrac{3}{2}$. B , C についても同様。

ラプラス変換とラプラス逆変換

微分方程式の解法への応用

(Step 4) 両辺をラプラス逆変換すれば

$$y(t) = L^{-1}(Y(s)) = -\frac{1}{2}\,e^{-3t} + \frac{3}{2}\,e^{t} - e^{2t} \tag{3}$$

となるが これが (1), (2) の解である.

ラプラス変換とラプラス逆変換

微分方程式の解法への応用

(Step 5) **検算する．(3) を微分すると**

$$y'(t) = \frac{3}{2}\,e^{-3t} + \frac{3}{2}\,e^{t} - 2\,e^{2t}, \quad y''(t) = -\frac{9}{2}\,e^{-3t} + \frac{3}{2}\,e^{t} - 4\,e^{2t}.$$

これを (1) へ代入すると

$$\begin{aligned} &y''(t) + y'(t) - 6y(t) \\ &= -\frac{9}{2}\,e^{-3t} + \frac{3}{2}\,e^{t} - 4\,e^{2t} \\ &\quad + \frac{3}{2}\,e^{-3t} + \frac{3}{2}\,e^{t} - 2\,e^{2t} \\ &\quad + 3\,e^{-3t} - 9\,e^{t} + 6e^{2t} \\ &= -6\,e^{t} \end{aligned}$$

$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 1$$

だから (2) も成り立つ。

だから (1) は成り立つ。