応用数学 A ガイダンス

科目の内容

0. 微分方程式の復習
1. ラプラス変換 と線形常微分方程式の解法への応用
2. 連立微分方程式
3. フーリエ級数
4. 偏微分方程式

授業の進め方

講義（スライドを使う）と演習（問題を配布する)。どちらも事前にプリントアウトしておくこと。ノートを作ってください。スライドに書き込むのも可。

評価

試験（中間と期末）と演習プリントの提出で評価する。

本日やること

1. ガイダンス
2. 復習
   - 微分方程式
3. Laplace 変換

復習

微分方程式

[方程式とは何か]

未知数：x の関係式

例

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

解は $x = 1$ と $x = 2$

[常微分方程式 とはなにか]

独立変数：x
未知関数：$y(x)$
その導関数：$y'(x), y''(x), \cdots$
の関係式

例

$$y'(x) = 3y(x)$$

解は $y(x) = Ce^{3x}$ (C は任意の実数)

復習

微分方程式

[偏微分方程式とは何か]

独立変数：x, y
未知関数：$u(x, y)$
その偏導関数：$u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y), \cdots$
の関係式

例

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

解は　$u = \log(x^2 + y^2)$　など

復習
微分方程式

常微分方程式の定義

x：独立変数

$y = y(x)$：未知関数 とその導関数

$y'(x)$, $y''(x)$, ...：未知関数の導関数

これらの関係式 $F(x, y, y', y'', \cdots) = 0$ を y に関する常微分方程式という.

以後常微分方程式を単に微分方程式という.

復習

微分方程式

常微分方程式の階数：含まれる導関数の階数の最大値

線形微分方程式：$y, y', y'' \cdots$ に関して 1 次であるような微分方程式

定数係数線形微分方程式：線形微分方程式の内 $y, y', y'' \cdots$ の係数が定数であるようなもの

変数係数線形微分方程式：線形微分方程式の内 $y, y', y'' \cdots$ の係数が定数でないようなもの

非線形微分方程式：y, y', y'' に関して 1 次でないもの

一般に微分方程式の解は無数にあるが, これらを任意の値をとりうる定数 (これを任意定数とよぶ) を用いて一般的に表したものを一般解という.

一般解の任意定数に数値を代入して得られる解を特殊解という.

復習
微分方程式

例

1.1　定数係数 1 階線形方程式（斉次）

$y'(x) + 2y(x) = 0$　　一般解は $y = Ce^{-2x}$　(C は任意定数)

初期値問題 $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$　　特殊解は $y = e^{2x}$

1.2　定数係数 1 階線形方程式（非斉次）

$y'(x) + 2y(x) = 2x$　　一般解は $y = Ce^{-2x} + 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$　(C は任意定数)

初期値問題 $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 2x, \\ y(0) = 1, \end{cases}$　　特殊解は $y = \dfrac{1}{2}e^{-2x} + 2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right)$

復習

微分方程式

例

2.1　定数係数 2 階線形方程式（斉次）

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

一般解は $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$
(C_1, C_2 は任意定数)

初期値問題 $\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$　特殊解は $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$

2.2　定数係数 2 階線形方程式（斉次）

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$$

一般解は $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$
(C_1, C_2 は任意定数)

初期値問題 $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$　特殊解は $y = e^{-x}(\cos x + \sin x)$

3. ラプラス変換とラプラス逆変換

広義積分

広義積分の定義

関数 $f(t)$ $(t > 0)$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ を

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

で定める。

特に $F'(t) = f(t)$ であるときは

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} F(T) - F(0) \quad \left(\text{これを } \Big[F(t)\Big]_0^{\infty} \text{ で表す.}\right)$$

となる。

3. ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス変換の定義

ラプラス変換の定義

$f(t)$: $(0,\infty)$ を定義域とする t の関数. s : 実数.
広義積分

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt$$

$F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換といい記号

$$L(f(t)),\ L(f),\ L(f)(s),\cdots$$

などで表す. つまり

$$L(f)(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt$$

3. ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス変換の定義

[ラプラス変換が存在する条件]

$f(t)$ が条件

- 区分的に連続：有限個の点以外で連続で, さらに不連続な点でも片側極限は存在する.
- 指数位数：ある数 M, α が存在して $|f(t)| \leqq Me^{\alpha t}$, $(t > 0)$

を満たすとき, $\alpha < s$ であるような実数 s に対して $F(s)$ が収束し, Laplace 変換が定義できる事が知られている. 以後はこのことを仮定する.

3. ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス逆変換の定義

ラプラス逆変換の定義

$$L(f(t)) = F(s)$$

となるような t の関数 $f(t)$ は, (もしあれば) 不連続点での違いを無視すればただ一つに決まる. このとき

$$L^{-1}(F(s)) = f(t)$$

によって決まる写像 L^{-1} をラプラス逆変換という.

3. ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス変換とラプラス逆変換の性質

性質 1. 線形性

関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$,$F_1(s)$, $F_2(s)$ と定数 c_1, c_2 に対して

$$L(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1\, L(f_1(t)) + c_2\, L(f_2(t)),$$
$$L^{-1}\,(c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)) = c_1\, L^{-1}(F_1(s)) + c_2\, L^{-1}(F_2(s)).$$

[確かめ]

3. ラプラス変換とラプラス逆変換

ラプラス変換とラプラス逆変換の性質

例 1. 指数関数のラプラス変換.

a を定数とするとき

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad (s > \mathrm{Re}\, a \text{ で存在する}) \quad \text{特に} \quad L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at} \quad \text{特に} \ L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

[確かめ]