応用数学A 演習 No. 10 解答

問題 1 (1) $\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi = 1$

(2) $\left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cos^2 nx\, dx$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ だから

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2n\pi}{4n}\right) - \left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\sin(-2nx)}{4n}\right)\right\} = 1$$

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi}(\sin n\pi - \sin(-n\pi)) = 0.$$

(4) $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \sin mx\, dx$

ここで $\cos nx \sin mx$ は奇関数だから

$$= 0$$

(5) $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \cos mx\, dx$

ここで $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$ だから

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx$$

$m+n \neq 0$, $m-n \neq 0$ だから

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(m+n)\pi - \sin(-(m+n)\pi)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\pi - \sin(-(m-n)\pi)}{m-n}\right] = 0.$$

問題 2

$$\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \,;\, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$$

は複素数値の関数空間で正規直交関数系となることを確かめよ。

複素数 z に対して $z\bar{z} = |z|^2$, 実数 θ に対して $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ に注意して

$$\left\| \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \overline{\left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = 1$$

$n \neq m$ のとき

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \right) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \overline{\left(\frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \right)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-imx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(n-m)x}}{2\pi} dx \\ &= \left[\frac{e^{i(n-m)x}}{2i(n-m)\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(n-m)\pi}}{2i(n-m)\pi} - \frac{e^{-i(n-m)\pi}}{2i(n-m)\pi} = 0\end{aligned}$$

問題 3 $f(x)$ は $-\pi < x < \pi$ では $= x$ だから奇関数である. 区間の両端での値は積分に影響しないから積分するときは奇関数としてあつかってよい. $\cos nx$ は偶関数だから $f(x)\cos nx$ は奇関数, $\sin nx$ は奇関数だから $f(x)\sin nx$ は偶関数であるとしてよい. だから

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[x \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} (-\pi \cos n\pi) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-2(-1)^n}{n}\end{aligned}$$

である. したがって

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2(-1)^n}{n} \right) \sin nx \\ &= 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots \right).\end{aligned}$$

Mathematica で 10 項までの Fourier 級数を計算し グラフを書いてみよう.

```
FourierTrigSeries[x, x, 10]
```

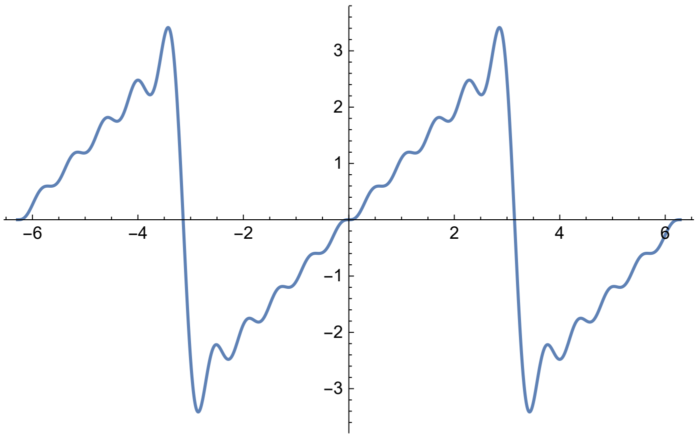
と入力すると

```
2 Sin[x] - Sin[2 x] + 2/3 Sin[3 x] - 1/2 Sin[4 x] + 2/5 Sin[5 x] -
 1/3 Sin[6 x] + 2/7 Sin[7 x] - 1/4 Sin[8 x] + 2/9 Sin[9 x] -
 1/5 Sin[10 x]
```

のように出力され

```
Plot[ FourierTrigSeries[x, x, 10],
  {x, -2Pi, 2Pi},
  AspectRatio -> Automatic]
```

と入力するとグラフが描かれる.



問題 4 $f(x) = |x|$ は偶関数, $\cos nx$ は偶関数だから $f(x)\cos nx$ は偶関数である. また $\sin nx$ は奇関数だから $f(x)\sin nx$ は奇関数である. だから

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$n = 1, 2, \cdots$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\right), \end{aligned}$$

である. したがって

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\right)\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\right).$$

Mathematica で 5 項までの Fourier 級数を計算し グラフを書いてみよう.

```
FourierTrigSeries[Abs[x], x, 5]
```

と入力すると

```
\[Pi]/2 - (4 Cos[x])/\[Pi] - (4 Cos[3 x])/(9 \[Pi]) - (4 Cos[5 x])/( 25 \[Pi])
```

のように出力され

```
Plot[ FourierTrigSeries[Abs[x], x, 5],
  {x, -2Pi, 2Pi},
  AspectRatio -> Automatic]
```

と入力するとグラフが描かれる.