応用数学 A 演習 No.9

学生番号		氏名	

問題 1 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,;\ n=1,2,\cdots \right\}$

が区間 $[-\pi,\pi]$ 上の正規直交関数系であることを確かめよう．そのためには次のことを確かめればよい．

(1) $\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\| = 1$ であること．

(2) $\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \right\| = 1$ であること．

(Hint. $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$.)

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \right) = 0,\ n=1,2,\cdots$ であること．

(4) $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx \right) = 0,\ m,n=1,2,\cdots$ であること．

(Hint. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$.)

(5) $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx \right) = 0,\ m,n = 1,2,\cdots,$ $m \neq n$ であること．

(Hint. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.)

実はこの他に

$\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right\| = 1,\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right) = 0,$

$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx \right) = 0,\ m \neq n$

であることを確かめなければならないが省略する．