応用数学 A 演習 No. 7 解答

問題 1 (1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値固有ベクトルを求めて対角化せよ。

(Step 1.) 固有値は固有方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ の解である.

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = -1, 3.$

(step2) $\lambda = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ を求める

$A\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ でなくてはならないから

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_2 = -u_1 \\ 2u_1 + u_2 = -u_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ u_1 = -u_2 \text{ (必ず不定になる!)}$$

したがって

$$\boldsymbol{u} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad k \text{ は } 0 \text{ でない任意の数}$$

検算する.

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \end{pmatrix} = -\boldsymbol{u}$$

だから正しい.

(Step3) $\lambda = 3$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ を求める

$A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}$ でなくてはならないから

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + 2v_2 = 3v_1 \\ 2v_1 + v_2 = 3v_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ v_1 = v_2$ (必ず不定になる!)

したがって

$\boldsymbol{u} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k$ は 0 でない任意の数

検算する.

$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ 3k \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{v}$

だから正しい.

(Step4) 無数にある固有ベクトルのうち, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる. これらを並べて $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を作る. (これを対角化行列という.) この $\boldsymbol{P}$ により $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot (\star)$

とできる. このことを $\boldsymbol{A}$ の対角化という.

検算する。

$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (教科書 P.64 をみよ) だから

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となることを各自計算して確かめよ。

(2) 独立変数を t, 未知関数を $x = x(t)$, $y = y(t)$ とする. c_1, c_2 は定数とする。 ラプラス変換を用いて次の初期値問題を解け.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + y(t), \\ x(0) = c_1, \ y(0) = c_2. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{\boldsymbol{y}}' = \boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{y}}, \\ \vec{\boldsymbol{y}}(0) = \vec{\boldsymbol{c}} \end{cases} \qquad \text{ただし}\ \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

この解は

$$\vec{\boldsymbol{y}}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{c}}$$

であるが

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}$$

だから

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t}(c_1 - c_2) + e^{3t}(c_1 + c_2) \\ -e^{-t}(c_1 - c_2) + e^{3t}(c_1 + c_2) \end{pmatrix}$$

である。