応用数学 A 演習 No. 6 解答

問題 1

(1) $$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -x(t), \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases}$$

を解く.

解法 1. 方程式の両辺をラプラス変換して $L(x) = X$, $L(y) = Y$ とおき微分法則を使うと

$$\begin{cases} sX - x(0) = Y, \\ sY - y(0) = -X, \end{cases}$$

だから初期条件を代入して整理すると

$$\begin{cases} sX &= Y + 1, \\ sY &= -X, \end{cases} \left(\Leftrightarrow \begin{cases} sX - Y &= 1, \\ X + sY &= 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

これを X, Y について解いて

$X = \dfrac{s}{s^2+1}, \quad Y = \dfrac{-1}{s^2+1},$

ラプラス逆変換して

$x = \cos t, \quad y = -\sin t.$

解法 2.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

とおく.

$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix},$

$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{s^2+1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix},$

$e^{t\boldsymbol{A}} = L^{-1}((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

だから

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{t\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

(2) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) + y(t), \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1. \end{cases}$

を解く.

解法 1. 方程式の両辺をラプラス変換して $L(x) = X$, $L(y) = Y$ とおき微分法則を使うと

$$\begin{cases} sX - x(0) = X + Y, \\ sY - y(0) = -X + Y, \end{cases}$$

だから初期条件を代入して整理すると

$$\begin{cases} (s-1)X &= Y, \\ (s-1)Y &= -X + 1, \end{cases} \left(\Leftrightarrow \begin{cases} (s-1)X - Y &= 0, \\ X + (s-1)Y &= +1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

これを X, Y について解いて

$$X = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}, \quad Y = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1},$$

ラプラス逆変換して

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t.$$

解法 2.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

とおく.

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix},$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2 + 1} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s-1)^2+1} & \frac{1}{(s-1)^2+1} \\ \frac{-1}{(s-1)^2+1} & \frac{s-1}{(s-1)^2+1} \end{bmatrix},$$

$$e^{t\boldsymbol{A}} = L^{-1}((s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}$$

だから

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{t\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix}.$$