応用数学A 演習 No. 4 解答

問題 1

$$(1)\qquad \begin{cases} y'' + 4y' + 5y = e^{-t}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

方程式の両辺を Laplace 変換して線型法則を使うと

$L(y'') + 4L(y') + 5L(y) = L(e^{-t}) = \dfrac{1}{s+1}.$

$\mathcal{L}[y] = Y$ とおき, 微分法則 $L(y') = sL(y) - y(0),\ \ L(y'') = s^2L(y) - sy(0) - y'(0)$ を使い初期条件を代入すると

$(s^2 + 4s + 5)\,Y = \dfrac{1}{s+1} + s + 4.$

整理すると

$Y = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+4s+5)} + \dfrac{s+4}{s^2+4s+5} = \dfrac{s^2+5s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)}$

右辺を部分分数分解しよう．$s^2 + 4s + 5$ はこれ以上実数の範囲では因数分解できないからある実数の定数 A, B, C があって

$$\frac{s^2+5s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5} \qquad (s\text{ の恒等式})\cdots(a)$$

の形にすることができる．このときの定数 A, B, C の値を決めよう．(a) の両辺に $s+1$ をかけると

$\dfrac{s^2+5s+5}{s^2+4s+5} = A + \dfrac{(Bs+C)(s+1)}{s^2+4s+5} \qquad (s\text{ の恒等式}).$

ここで $s = -1$ を代入すると

右辺 $= A,$

左辺 $= \dfrac{1-5+5}{1-4+5} = \dfrac{1}{2}$

だから $A = \dfrac{1}{2}.$

(a) の両辺に $s^2 + 4s + 5$ をかけると

$\dfrac{(s^2+5s+5)}{s+1} = \dfrac{A(s^2+4s+5)}{s+1} + Bs + C \quad (s\text{ の恒等式}).$

ここで $s = -2 + i$ を代入すると $s^2 + 4s + 5 = 0$ だから

右辺 $= -2B + C + iB,$

左辺 $= \dfrac{-2+i}{-1+i} = \dfrac{3+i}{2}$

だから $B=\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{5}{2}$.

以上から

$Y=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{s+5}{s^2+4s+5}\cdots(b)$.

右辺第 2 項を $\dfrac{s+2}{(s+2)^2+1}$ と $\dfrac{1}{(s+2)^2+1}$ の定数倍の和の形に分けると

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(s+2)^2+1}.$$

ここでラプラス逆変換すると

$y=\dfrac{1}{2}\,e^{-t}+\dfrac{1}{2}\,e^{-2t}\cos t+\dfrac{3}{2}\,e^{-2t}\sin t.\cdots(c)$

これが解である. また (b) の代わりに

$Y=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1-3i}{4}\dfrac{1}{s+2-i}+\dfrac{1+3i}{4}\dfrac{1}{s+2+i}$.

のように部分分数分解し, さらにこれを逆変換して

$$y=\frac{1}{2}\,e^{-t}+\frac{1-3i}{4}\,e^{-(2-i)t}+\frac{1+3i}{4}\,e^{-(2+i)t}$$
$$=\frac{1}{2}\,e^{-t}+\frac{1-3i}{4}\,e^{-2t}(\cos t+i\sin t)+\frac{1+3i}{4}\,e^{-2t}(\cos t-i\sin t)$$

とし, これを整理しても同じ解が得られる.

(2) 検算してみよう. (c) を微分して

$$y'=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{7}{2}e^{-2t}\sin t$$

$$y''=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{9}{2}e^{-2t}\cos t+\frac{13}{2}e^{-2t}\sin t$$

これらを方程式に代入すると

$$\begin{aligned}
&y''+4y'+5y\\
&\quad=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{9}{2}e^{-2t}\cos t+\frac{13}{2}e^{-2t}\sin t\\
&\quad-\frac{4}{2}e^{-t}+\frac{4}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{28}{2}e^{-2t}\sin t\\
&\quad+\frac{5}{2}\,e^{-t}+\frac{5}{2}\,e^{-2t}\cos t+\frac{15}{2}\,e^{-2t}\sin t\\
&\quad=e^{-t}
\end{aligned}$$

となり微分方程式はみたされる. また $t=0$ を代入すると

$$y=\frac{1}{2}\,e^{0}+\frac{1}{2}\,e^{0}\cos 0+\frac{3}{2}\,e^{0}\sin 0=1.$$

$$y'=-\frac{1}{2}e^{0}+\frac{1}{2}e^{0}\cos 0-\frac{7}{2}e^{0}\sin 0=0.$$

となり初期条件も満たされる.