応用数学 A 演習 No. 2 解答

問題 1 (1) ラプラス変換を用いて次の初期値問題を解け.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

方程式の両辺を Laplace 変換して線型法則を使うと

$L(y'') + 3L(y') + 2L(y) = L(0) = 0.$

$\mathcal{L}[y] = Y$ とおき, 微分法則 $L(y') = sL(y) - y(0),\ L(y'') = s^2L(y) - sy(0) - y'(0)$ を使い初期条件を代入すると

$(s^2 + 3s + 2)\,Y - s - 3 = 0.$

整理すると

$Y = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

右辺を部分分数分解しよう. ある実数の定数 A, B があって

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (s \text{ の恒等式}) \cdots (a)$$

の形にすることができる. このときの定数 A, B の値を決めよう. (a) の両辺に $s+1$ をかけると

$\dfrac{s+3}{s+2} = A + \dfrac{B(s+1)}{s+2} \quad (s$ の恒等式$).$

ここで $s = -1$ を代入すると

右辺 $= A,$

左辺 $= \dfrac{-1+3}{-1+2} = 2$

だから $A = 2.$

(a) の両辺に $s+2$ をかけると

$\dfrac{s+3}{s+1} = \dfrac{A(s+2)}{s+1} + B \quad (s$ の恒等式$).$

ここで $s = -2$ を代入すると

右辺 $= B,$

左辺 $= \dfrac{-2+3}{-2+1} = -1$

だから $B = -1.$

以上から

$Y = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \cdots (b).$

ここでラプラス逆変換すると

$y = 2e^{-t} - e^{-2t}. \cdots (c)$

これが解である.

(2) 検算してみよう. (c) を微分して

$y' = -2e^{-t} + 2e^{-2t}$

$y'' = 2e^{-t} - 4e^{-2t}$

これらを方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&y'' + 3y' + 2y \\
&\quad = 2e^{-t} - 4e^{-2t} \\
&\quad -6e^{-t} + 6e^{-2t} \\
&\quad +4e^{-t} - 2e^{-2t} \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

となり微分方程式はみたされる. また $t = 0$ を代入すると

$y = 2e^{0} - e^{0} = 1.$

$y' = -2e^{0} + 2e^{0} = 0.$

となり初期条件も満たされる.