本日やること

1. 離散型確率変数
   - 定義
   - 確率変数の期待値（平均）
   - 確率変数の分散・標準偏差
   - 二項分布
2. 連続型確率変数
   - 定義
3. 正規分布
   - 定義・性質
   - 二項分布との関係・Galton Board

離散型確率変数

定義

確率変数の定義

X が (離散型) 確率変数であるとは,

(i) 値 $x_1, x_2, \cdots$ をとり,

(ii) 各 i に対して確率 p_i が決まる

ような変数のこと. $x_i \mapsto p_i$ の対応を X の確率分布という。

p_i は確率だから

$$p_i \geqq 0,\ (i = 1, 2, \cdots), \quad p_1 + p_2 + \cdots = 1$$

離散型確率変数

例

(1)　X：さいころを 1 回投げて出た目

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(2)　X：さいころを 2 回投げて出た目の数の和

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

離散型確率変数

離散型確率変数の期待値（平均）

離散型確率変数の期待値（平均）

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \ (= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots)$$

を離散型確率変数 X の期待値または平均という。

[例] さいころを 1 回振り，でた目の数 × 100 円がもらえるゲームをする。もらえる金額を表す確率変数を X とする。X は値 $100, 200, 300, 400, 500, 600$ をとりそれらの確率はすべて $\frac{1}{6}$ だから期待値は

$$E(X) = \frac{1}{6} \times (100 + \cdots + 600) = 350$$

ゲームをたくさん繰り返すと，もらえた金額 ÷ ゲームの回数はこの値に近づく。

離散型確率変数

離散型確率変数の分散・標準偏差

離散型確率変数の分散・標準偏差

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

を確率変数 X の分散という。

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

を確率変数 X の標準偏差という。

これは X の値の散らばり具合を表す量である。

離散型確率変数

期待値・分散の性質

期待値・分散の性質

a, b 定数 X, Y 確率変数 に対して

(i) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$,

(ii) $E(1) = 1$,

(iii) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

(iv) $V(aX) = a^2V(X)$

離散型確率変数

独立性

離散型確率変数の独立性

X：値 $x_1, x_2, \cdots$ をとる確率変数

Y：値 $y_1, y_2, \cdots$ をとる確率変数

が

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

を満たすとき, X, Y は互いに独立であるという。

離散型確率変数

独立性

$Y = y_j$ が起こったことを前提にして $X = x_i$ が起こる条件付確率

$$\frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \quad (\text{これを } P_{(Y=y_j)}(X = x_i) \text{ と書く})$$

を考えると

$$P_{(Y=y_j)}(X = x_i) = P(X = x_i)$$

となるので, y_j に因らないことがわかる。

同じものを同じやり方でくり返し測定するような場合, 各回での測定値の出現の確率は前回での測定値に因らないであろうから, 各回の測定は独立であると考えられる。

離散型確率変数

独立性

独立な確率変数の性質

X, Y が独立であるとき

(i)　$E(XY) = E(X)E(Y)$

(ii)　$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

離散型確率変数

二項分布

二項分布の定義

確率変数 X が値 $r = 0, 1, 2, \cdots$ をとりその確率が

$$P(X = r) = {}_n\mathsf{C}_r p^r q^{n-r}, \quad p, q \geq 1,\ p + q = 1$$

であるとき，この確率分布を二項分布といい $B(n, p)$ で表す。

これは「1 回の試行で事象 A の起こる確率が p であるとき、この試行を独立に n 回反復したとき A が起こる回数」を表す確率変数である。

離散型確率変数

二項分布

二項分布の期待値・分散

確率変数 X の確率分布が二項分布 $B(n,p)$ であるとき

(i) $E(X) = np$

(ii) $V(X) = npq$

である。

連続型確率変数

定義

連続型確率変数の定義

X が連続型確率変数であるとは,

(i) 連続した値 $x \in R$ をとり,

(ii) 各 a, b に対して確率 $P(a \leqq X \leqq b)$ が決まる

ような変数のこと.

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

となる関数を X の確率密度関数という。

連続型確率変数

期待値・分散

連続型確率変数の定義

X が連続型確率変数, $f(x)$ がその確率密度関数であるとき, 期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$ を

(i) $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

(ii) $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$

で定める。

正規分布

定義

正規分布の定義

密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (-\infty < x < \infty)$$

で与えられる確率分布を正規分布とよび $N(\mu, \sigma^2)$ で表す。

正規分布

期待値・分散

正規分布の期待値・分散

確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, その期待値と分散は

$$E(X) = \mu, \quad V(x) = \sigma^2$$

である。

正規分布

二項分布との関係・Galton Board

正規分布はある種の二項分布の極限と考えることができる。つまり、正規分布は「微小な試行を独立に多数回繰り返した時生じる分布である」といえる。

これを説明するのにちょうどよい仕掛けが Galton Board である。

問題

[問]　表が出る確率が $\frac{1}{2}$ のコインを 10 回投げるとき表の出る数を X とすると, 二項分布 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数となる。
この確率分布をグラフに表してみよ。