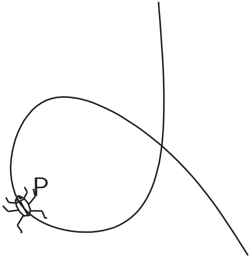
本日やること

1. 微分法
   - 運動する点
   - パラメータ表示された関数の微分法

微分法

運動する点

運動する点のパラメータ表示



I : 区間

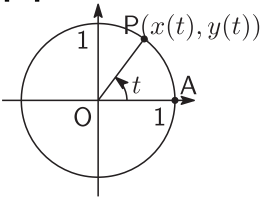
$x(t), y(t) : t \in I$ 連続関数

のとき点 P の座標を $(x(t), y(t))$ とする。
t が I を動いた時の P の軌跡は曲線となる。このように曲線を表す方法を t をパラメータとするパラメータ表示という。

とくに t を時刻と考えると P は動点となる。

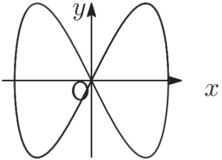
微分法
運動する点

[例]



$$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

のとき, 軌跡は原点中心半径 1 の円周。



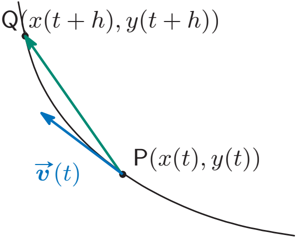
$$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

のとき, 軌跡は左図のとおり。

微分法

運動する点

動点の速度ベクトルの定義

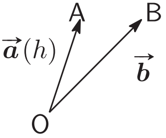


t を時刻とし, $x(t)$, $y(t)$ は 微分可能であるとき,
動点 P$(x(t), y(t))$ の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を

$$\vec{v} = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}$$

で定める。

ただしベクトルの収束を



$$\lim_{h \to 0} \vec{a}(h) = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \overline{\mathrm{AB}} = 0$$

で定める。$\vec{a}(h) = (a_1(h), a_2(h))$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ とすると,
$\lim_{h \to 0} a_1(h) = b_1$, $\lim_{h \to 0} a_2(h) = b_2$ といっても同じこと

微分法

運動する点

動点の速度ベクトルの成分表示

動点 P$(x(t), y(t))$ の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を成分表示すると

$$\vec{v} = (x'(t), y'(t))$$

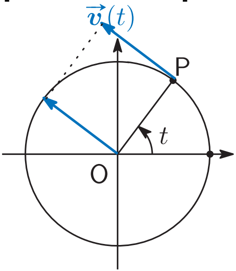
となる。

[確かめ]

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h} &= \frac{(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))}{h} \\
&= \left(\frac{(x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\
&\to (x'(t), y'(t))
\end{aligned}$$

微分法
運動する点

[例：等速円運動]



動点 P は原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している。

$t=0$ のとき P$=(1,0)$

ならば

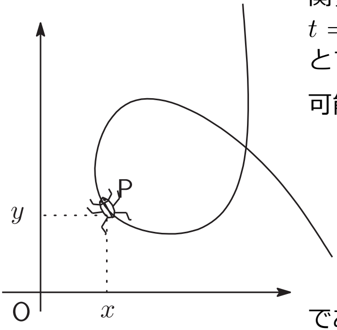
時刻 t の P の座標 $=(\cos t, \sin t)$

P の速度ベクトル $\vec{v}(t)=(-\sin t, \cos t)$

微分法の応用

パラメータ表示された関数の微分法

パラメータ表示された関数の微分法



関数 $x = f(t)$, $y = g(t)$ および f の逆関数 $t = f^{-1}(x)$ が存在して，すべて微分可能であるとする．このとき，関数 $x \mapsto y$ が存在して微分可能で，$\dfrac{dx}{dt} = f'(t) \neq 0$ である点で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

である．

微分法の応用

パラメータ表示された関数の微分法

[確かめ]

$$\begin{tikzcd} & & y & \Delta y \\ \Delta t & t \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & \\ & & x \arrow[ul, bend right, "f^{-1}"'] \arrow[uu, dotted] & \Delta x \end{tikzcd}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

において $\Delta t \to 0$ とすればよい。