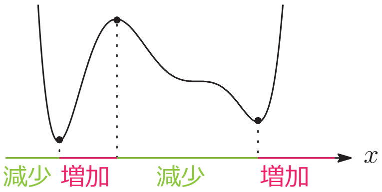
本日やること

1. 微分法の応用
   - 関数の増減・極値
   - 関数の凹凸

微分法の応用

関数の増減・極値

[目標]



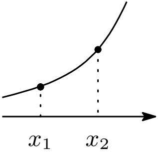
関数がどこで極値をとるかを知りたい。

微分法の応用

関数の増減・極値

関数の増減

[単調増加]



関数 $f(x)$ が区間 I で単調増加であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leqq f(x_2)$$

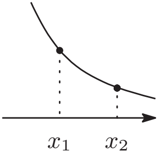
であること。

狭義単調増加であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$

であること。

[単調減少]



関数 $f(x)$ が区間 I で単調減少であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geqq f(x_2)$$

であること。

狭義単調減少であるとは

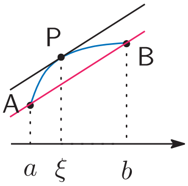
$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$

であること。

微分法の応用

関数の増減・極値

Lagrange の平均値の定理



$f(x)$: $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad a < \xi < b$$

となる ξ がある。

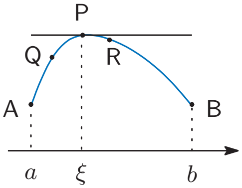
A$(a, f(a))$，B$(b, f(b))$ とおくと

$$\text{AB の傾き} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であることに注意せよ。定理は AB と平行な接線を持つ点 P$(\xi, f(\xi))$ があることを主張している。

微分法の応用
関数の増減・極値

[確かめ] (i) $f(a) = f(b)$ の場合。



関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で必ず最大値 M と最小値 m を持つ。
$M > f(a) = f(b)$ のときのみ考える。$M = f(\xi)$ とする。
小さい $h > 0$ をとり

$$\mathrm{Q}(\xi - h, f(\xi - h)),\quad \mathrm{R}(\xi + h, f(\xi + h))$$

とする。

$$\text{PR の傾き} = \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqq 0 \leqq \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} = \text{PQ の傾き}$$

微分可能だから $h \to +0$ とすると

$$\text{PQ の傾き}, \text{PR の傾き} \to f'(\xi)$$

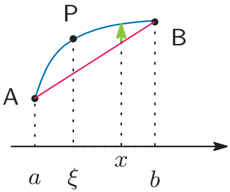
したがって

$$f'(\xi) = 0 = \text{AB の傾き}$$

微分法の応用

関数の増減・極値

[確かめ] (ii)　一般の場合



$$F(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right\}$$

とおくと, (i) の条件を満たす。したがって $F'(\xi) = 0$ となる ξ がある。一方

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

より

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

だから正しい。

微分法の応用

関数の増減・極値

関数の増減の判定条件

$f(x) : [a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能 とする。

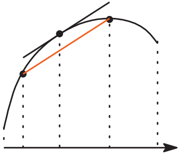
(i) 区間 (a,b) 上で $f'(x) = 0$
$\iff$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は定数関数。

(ii) 区間 (a,b) 上で $f'(x) > 0$
$\Rightarrow$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は狭義単調増加。

(iii) 区間 (a,b) 上で $f'(x) < 0$
$\Rightarrow$ 区間 (a,b) で $f(x)$ は狭義単調減少。

微分法の応用
関数の増減・極値

[⇒ の確かめ]



$a < x_1 < x_2 < b$ を任意にとる。Lagrange の平均値の定理により

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad a < \xi < b$$

となる ξ がある。

(i) のとき，$f'(\xi) = 0$ だから $f(x_1) = f(x_2)$.

(ii) のとき，$f'(\xi) > 0$ だから $f(x_1) < f(x_2)$.

(iii) のとき，$f'(\xi) < 0$ だから $f(x_1) > f(x_2)$.

⇐ は明らか。

微分法の応用

関数の増減・極値

極値の定義

$f(x)$ が点 a で極大になる

$\iff$ 　a の近所で最大になる

$\iff$ 　ある $\delta > 0$ があって $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a)$

極小も同様。

極大値と極小値をあわせて極値という。

微分法の応用

関数の増減・極値

極値の必要条件

$f(x)$ が微分可能で, ある点 a で極値をとる。

$\Rightarrow \quad f'(a) = 0$

[確かめ] Lagrange の平均値定理の (i) と同様。

微分法の応用

関数の増減・極値

極値の十分条件

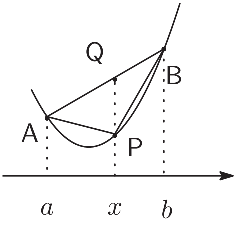
関数が微分可能で

(i) 点 a を境に単調増加から単調減少に変わるとき a で極大。

(ii) 点 a を境に単調減少から単調増加に変わるとき a で極小。

関数の凹凸

関数の凹凸の定義



(i) 関数 $f(x)$ が区間 I で下に凸であるというのは, $a, x, b \in I$ が $a < x < b$ をみたすとき, A$(a,\ f(a))$, P$(x,\ f(x))$ B$(b,\ f(b))$ とおくと P は線分 AB の下側にあること. つまり

$$f(x) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \quad (= \text{Q の } y \text{ 座標})$$

(ii) またこれは「AP の傾き $<$ PB の傾き」といっても同じ。つまり

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

上に凸も同様に定義する。

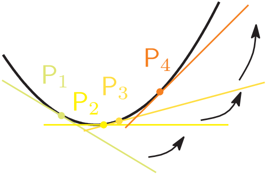
関数の凹凸

関数の凹凸の判定条件

$f(x)$ が I で 2 回微分可能であるとき,

(i) I で下に凸（上に凸） $\iff$ (ii) I で $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$)

[考え方]



じつは

(i) $\iff$ (iii) $f'(x)$ は単調増加

がわかる。

(iii) が (ii) と同値なのは既にやったことからわかる。

例題

[例題]　$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ の増減・凹凸・極値を調べる。

[Step 1]　導関数の零点・符号を調べる。

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, 1$ のみ。このほかの点では極値をとらない。

$x < 0$　では　$x^2 > 0, x - 1 < 0$　だから $f'(x) < 0$　だから狭義単調減少

$0 < x < 1$ では　$x^2 > 0, x - 1 < 0$　だから $f'(x) < 0$　だから狭義単調減少

$1 < x$　では　$x^2 > 0, x - 1 > 0$　だから $f'(x) > 0$　だから狭義単調増加

例題

[Step 2] 2 階導関数の符号を調べる。

$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$$

$f''(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, \dfrac{2}{3}$。

$x < 0$ では $x < 0, 3x-2 < 0$ だから $f''(x) > 0$ だから下に凸

$0 < x < \dfrac{3}{2}$ では $x > 0, 3x-2 < 0$ だから $f''(x) < 0$ だから上に凸

$\dfrac{3}{2} < x$ では $x > 0, 3x-2 > 0$ だから $f''(x) > 0$ だから下に凸

例題

[Step 3] 増減表にまとめる.

x	$x<0$	0	$0<x<\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	$-\frac{16}{27}$	↘	-1	↗
		変曲点		変曲点		極小	

[Step 4] グラフの概形を書く