本日やること

- 高階導関数

微分法
高階導関数

[復習：導関数] $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される。記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

も使う。

高階導関数

高階導関数の定義

高階導関数の定義

1. $f(x)$ が 区間 I で連続微分可能であるとは，導関数 $f'(x)$ が連続であること。

2. $f(x)$ が 区間 I で 2 階微分可能であるとは，導関数 $f'(x)$ が再び微分可能であること。このとき 関数 $x \mapsto (f')'(x)$ を，関数 $f(x)$ の 2 階導関数といい，記号

$$f'', \quad f''(x), \quad (f(x))'', \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

などで表す.

高階導関数

高階導関数の定義

高階導関数の定義 (続き)

3. 同様に $n = 1, 2, \cdots$ にたいして n 階微分可能であること, n 階導関数を定め, 記号

$$f^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad (f(x))^{(n)}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

などで表す.

4. $f(x)$ が n 回連続微分可能であるとは, n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続であること。

微分法

主な関数の高階導関数

べき関数の高階導関数

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{\alpha}, \text{（}\alpha \text{ は実数の定数 ）のとき} \\
f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{(\alpha-n)}
\end{aligned}
$$

例えば $f(x) = x^4$ のとき

$$
f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 4 \cdot 3x^2, \quad f'''(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2x, \quad f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!
$$

微分法

主な関数の高階導関数

指数関数・対数関数の高階導関数

(i) $f(x) = e^x$ のとき

$$f^{(n)}(x) = e^x, \ (n = 1, 2, \cdots)$$

(ii) $f(x) = \log x \ (x > 0)$ のとき

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$$

(i) は $(e^x)' = e^x$ だから。 (ii) は

$$(\log x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$(\log x)'' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}$$

$$(\log x)''' = ((-1)x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$\vdots$$

だから

微分法

主な関数の高階導関数

三角関数の高階導関数

$$f(x) = \sin x \text{ のとき } \ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$
$$f(x) = \cos x \text{ のとき } \ f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \ (n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \sin x \text{ のとき}$$
$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \quad \left(x + \frac{\pi}{2} = t \text{ とおいた}\right)$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \frac{dt}{dx} = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \times 1 = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$

これをくりかえす。$\cos x$ のときも同様。

微分法

Leibniz の公式

Leibniz の公式

$f(x)$, $g(x)$: 区間 I で n 回微分可能

$\Longrightarrow$ $f(x)g(x)$ も I で n 回微分可能であり

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathsf{C}_r f^{(n-r)}(x) g^{(r)}(x)$$

微分法

Leibniz の公式

[例] $(e^x)^{(r)} = e^x \quad (r = 0, 1, 2, \cdots)$, $x'' = x''' = (x)^{(4)} = \cdots = 0$ だから

$$
\begin{aligned}
(xe^x)^{(n)} &= {}_n\mathrm{C}_0 (e^x)^{(n)}(x)^{(0)} + {}_n\mathrm{C}_1 (e^x)^{(n-1)}(x)^{(1)} + {}_n\mathrm{C}_2 (e^x)^{(n-2)}(x)^{(2)} + \cdots \\
&= e^x x + ne^x (x)' + {}_n\mathrm{C}_2 e^x (x)'' + \cdots \\
&= (x+n)e^x
\end{aligned}
$$