

# 本日よりこと

- ① 初等関数の導関数
  - 対数微分法
  - 三角関数の導関数
  - 逆三角関数

# 初等関数の導関数

## 対数微分法

定理 4.13 対数微分

関数  $f(x)$  が微分可能であるとき,

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[確かめ]  $t = f(x)$  において合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx} \log |f(x)| = \left( \frac{d}{dt} \log |t| \right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

# 初等関数の導関数

## 対数微分法

[例]  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  ( $\alpha$ : 実数の定数) の証明。

$y = x^\alpha$  とおき両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^\alpha = \alpha \log x$$

両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

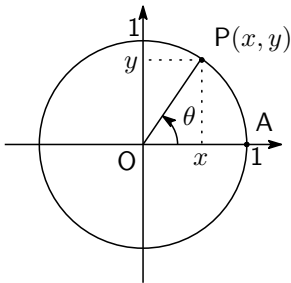
したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

# 初等関数の導関数

## 三角関数の導関数

### 復習 三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A(1, 0) から正の向きに  $\theta$  ラジアン回転した点とし、P の座標を  $(x, y)$  とするとき

$$\cos \theta = x : \text{余弦}$$

$$\sin \theta = y : \text{正弦}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} : \text{正接}$$

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

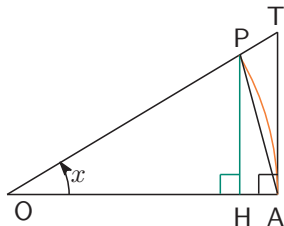
また、これらによって定められる関数  $f(\theta) = \sin \theta$  等を三角関数という。

# 初等関数の導関数

## 三角関数の導関数

### 三角関数の基本極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$\cos x \rightarrow 1$  であるからはさみうちの原理により  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$   
 $x \rightarrow -0$  の場合も同様.

[確かめ]  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $x \rightarrow +0$  とする.

$PH = \sin x$ , 弧  $\widehat{PA} = x$ ,  $TA = \tan x$

$\triangle OPA$ , 扇型  $OPA$ ,  $\triangle OTA$  の面積を比較

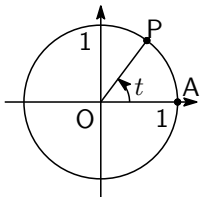
$$0 < \frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x \quad \left( = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

# 初等関数の導関数

## 三角関数の導関数

### 等速円運動



動点 P は原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している。

$t = 0$  のとき  $P = A$

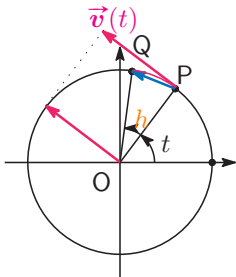
ならば

時刻  $t$  の P の座標 =  $(\cos t, \sin t)$

# 初等関数の導関数

## 三角関数の導関数

等速円運動の速度ベクトル



P の速度ベクトル  $\vec{v}(t)$  を

$$\vec{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{h}$$

で定める。ただし

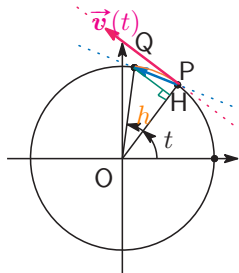
P : 時刻  $t$  の点, Q : 時刻  $t+h$  の点

このとき

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left( \cos \left( t + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( t + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= (-\sin t, \cos t) \cdots (\star) \end{aligned}$$

# 初等関数の導関数

## 三角関数の導関数



[確かめ] (i)  $\vec{v}(t)$  の向きは接線方向で正の回転の向きである. なぜなら直線 PQ は  $h \rightarrow 0$  のとき接線に近づくから.

(ii)  $\vec{v}(t)$  の大きさは 1 である. なぜなら

$$\frac{QH}{h} = \frac{\sin h}{h} \leq \left| \frac{\overrightarrow{PQ}}{h} \right| \leq \frac{\overbrace{PQ}}{h} = 1$$

かつ  $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$  だから.

(i), (ii) より  $\vec{v}(t)$  は  $\overrightarrow{OP} = (\cos t, \sin t)$  を  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転したものだから (\*) がわかる.



# 初等関数の導関数

## 三角関数の導関数

一方,  $P(\cos t, \sin t)$ ,  $Q(\cos(t+h), \sin(t+h))$  だから

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PQ}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(t+h) - \cos t, \sin(t+h) - \sin t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(\cos(t+h) - \cos t)}{h}, \frac{(\sin(t+h) - \sin t)}{h} \right) \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(t+h) - \cos t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin(t+h) - \sin t)}{h} \right) \\ &= ((\cos t)', (\sin t)')\end{aligned}$$

でもあるから,  $(\star)$  と比較して

$$((\cos t)', (\sin t)') = (-\sin t, \cos t)$$

同様にして, 等速円運動に限らず時刻  $t$  での座標が  $(f(t), g(t))$  である動点  $P$  の速度ベクトルは成分表示すると

$$\vec{v}(t) = (f'(t), g'(t))$$

となることがわかる。

# 初等関数の導関数

## 三角関数の導関数

### 三角関数の導関数

$$(i) (\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

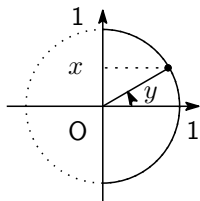
$$(ii) (\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

[確かめ] 前節より明らか。

# 初等関数の導関数

## 逆三角関数の導関数

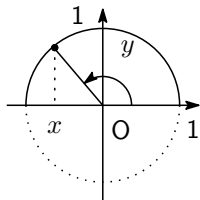
逆三角関数の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\iff$$

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y = \cos^{-1} x, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

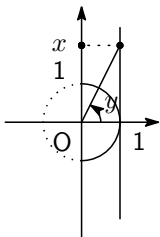
$$\iff$$

$$x = \cos y, \quad (0 \leq y \leq \pi)$$

# 初等関数の導関数

## 逆三角関数の導関数

逆三角関数の定義



$$y = \tan^{-1} x, \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\iff$$

$$x = \tan y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

# 初等関数の導関数

## 逆三角関数の導関数

### 逆三角関数の導関数

$$(i) \quad (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(ii) \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$(iii) \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

# 初等関数の導関数

## 逆三角関数の導関数

[(i) の確かめ]  $y = \sin^{-1} x$  とおくと  $x = \sin y$ .

$$-1 < x < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos y > 0$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \sin y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} > 0$$

であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

# 初等関数の導関数

## 逆三角関数の導関数

[(iii) の確かめ]  $y = \tan^{-1} x$  とおくと  $x = \tan y$ .

$$\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ だから } \cos y > 0$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \tan y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 > 0$$

であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}$$