本日やること

1. 初等関数の導関数
    - 復習：合成関数の微分法・逆関数の微分法
2. 指数関数
3. 対数関数
    - 対数の定義
    - 対数の性質
    - 対数関数の定義
4. 指数関数・対数関数の導関数
    - 対数微分法

初等関数の導関数

復習：関数の定義・合成関数

復習：定理 4.7.　合成関数の微分法

$y = f(t),\ t = g(x)$ ：微分可能 $\Rightarrow$ $y = f(g(x))$ ： 微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \left(\text{または}\ (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)\right)$$

復習：逆関数の微分法

(i) 関数 $y = f(x)$ が区間 I で連続かつ狭義単調であるとすると逆関数が存在して連続である.

(ii) さらに $f(x)$ が I で微分可能で $f'(x) \neq 0$ ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も $f(I)$ で微分可能で次が成り立つ：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

指数関数

指数法則

指数法則と有理数べき

指数法則　$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s$ は有理数　…………………… ◇

をみとめると**有理数べき**は

$$a^0 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓒ}$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓓ}$$

のように定められる。

指数関数

指数法則

指数法則と有理数べき

逆に A, B, C, D のように定めると指数法則が成り立つことが確かめられる。
教科書 P.20 例 2.2 をみよ。

指数関数

指数法則

指数法則に追加

$a > 0$, $b > 0$, t, s は有理数のとき

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iv) $(ab)^r = a^r b^r$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

指数関数

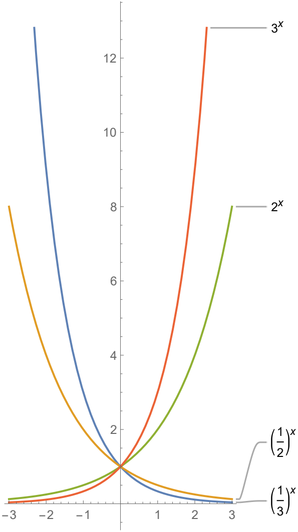
定義

指数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．実数べきから作られる関数 $f(x) = a^x$ を，a を底とする x の指数関数とよぶ．
定義域は実数全体である．

指数関数

グラフ



$2, 2^2, 2^3, \cdots$ は激しく増加する。

実数べき 2^x は等比数列 2^n, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから，x が増加すると同様に激しく増加する。

$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$ は非常にはやく 0 に近づく。

実数べき $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は等比数列 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから，x が増加すると同様に非常にはやく 0 に近づく。

指数関数

性質

定理 2.1. 指数関数の性質

(I) 指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$, 値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である. また,

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加,

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少.

(II) すべての実数 $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

ただし, 関数 $f(x)$ が

狭義単調増加であるとは $t < s \Rightarrow f(t) < f(s)$ であること。

狭義単調減少であるとは $t < s \Rightarrow f(t) > f(s)$ であること。

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a > 0$, $a \neq 1$ を満たす定数とする．このとき，正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する．この p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し，**a を底とする M の対数**という．また，M を**真数**と呼ぶ．つまり

$$p = \log_a M \iff a^p = M \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である．$\log_a M$ はログ底 a の M と読む．

対数関数

対数の定義

特に

$$a^{\log_a M} = M$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a a = 1 \iff a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$$

注意すること

底の条件：$a > 0,\ a \neq 1$

真数条件：$M > 0$

対数関数

例

[例]

$\log_2 \sqrt{32}$ を求める.

$\log_2 \sqrt{32} = p$ とおくと 定義より

$$\Leftrightarrow \ 2^p = \sqrt{32}$$

ところで $\sqrt{32} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$ だから指数を比較して

$$p = \frac{5}{2}$$

対数関数

対数の性質

対数の性質

a, b : 1 でない正の数, $M>0$, $N>0$, k, x, p を実数とするとき

(i) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a\left(M^k\right) = k\log_a M$

(iv) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (底の変換公式)

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

対数関数
対数の性質

[(i) の確かめ]

$$\log_a M = t \text{ とおく} \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^t = M$$

$$\log_a N = s \text{ とおく} \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^s = N$$

$$\text{かけ合わせて} \quad a^t a^s = MN$$

$$\text{指数法則より} \quad \|$$

$$\log_a MN = t + s \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^{t+s}$$

$$\|$$

$$\log_a M + \log_a N$$

対数関数

対数の性質

[(iv) の確かめ]

$$\log_a b = t \qquad \log_b c = s \quad \text{とおく}$$

定義より $\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$$a^t = b \qquad b^s = c$$

指数法則より

$$a^{ts} = (a^t)^s = b^s = c$$

定義より $\Updownarrow$

(iv) $\Longleftrightarrow$ $\log_a c = ts = \log_a b \log_b c$

対数関数

例

[例]

$X = \log_a x$, $Y = \log_a y$, $Z = \log_a z$ とおくと

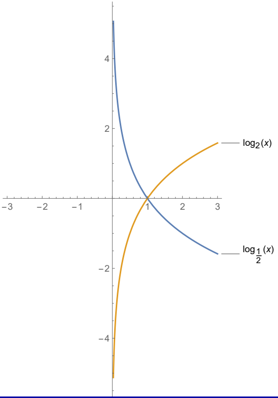
$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z = X + Y + Z$$

$$\log_a \frac{\sqrt{x}y}{\sqrt{z^3}} = \log_a(x^{\frac{1}{2}}yz^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a x + \log_a y - \frac{3}{2}\log_a z$$
$$= \frac{1}{2}X + Y - \frac{3}{2}Z$$

指数関数
定義

対数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．関数 $f(x) = \log_a x$ を，a を底とする x の対数関数とよぶ．



定義域は 正の実数全体 $(0, \infty)$，値域は 実数全体 $\mathbb{R}$ である．また，

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加，

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少．

指数関数の逆関数である。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

ネイピアの数 e

次の極限が存在する:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

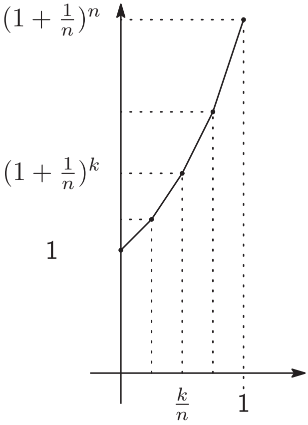
この極限の値 e はネイピアの数とよばれ, 無理数である。円周率 π と並んで最重要の定数である。

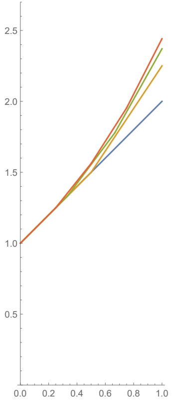
$$e = 2.718281828459\cdots$$

である。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数





$n = 1$ $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$n = 2$ $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

$n = 3$ $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2.37037\cdots$

$n = 4$ $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2.44141\cdots$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

以下 (i), (ii) を確かめる。

(Step 1) $0 < a \leqq b$ ならば $\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{a+1}{b+1}$。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 2) 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ は単調増加。なぜなら 2 項定理により

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!\,n^k}$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{n+1}\times\frac{n+1-1}{n+1}\times\cdots\times\frac{n+1-k+1}{n+1}\times\frac{1}{k!}$$

$$\leqq 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{n+1}{n+1}\times\frac{n}{n+1}\times\cdots\times\frac{n-k+2}{n+1}\times\frac{1}{k!}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq 3$. なぜなら $k=1,\ldots,n$ のとき $k! \geqq 2^{k-1}$ であるから

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\,\frac{1}{k!}\\ &\leqq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1+\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}\\ &< 1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 3\end{aligned}$$

(Step 4) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は有界かつ単調増加だから収束する。(教科書 47 ページまたはスライド第 1 回) これで (i) がわかった。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

(Step 5) $x \to +0$ の場合に (ii) を示す. $n \leqq \dfrac{1}{x} < n+1$ となる自然数 n をとる.

$t \mapsto (1+x)^t$ は t について単調増加であり $\dfrac{1}{n+1} < x \leqq \dfrac{1}{n}$ だから

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+x)^n \leqq (1+x)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{n+1} \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

である. ここで $x \to +0$ とすると $n \to \infty$ となるので

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e \times 1 = e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \times 1 = e$$

となる. したがって, はさみうちの原理により $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ も e に収束することがわかった. $x \to -0$ の場合は教科書 56 ページを見てください.

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

自然対数・常用対数

$\log_e x$ は 自然対数と呼ばれ, 記号

$$\log x \text{ あるいは } \ln x$$

で表す.

これに対して 10 を底とする対数を常用対数と呼ぶ.

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.11　対数関数の導関数

(i) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x > 0)$

(ii) $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$

[(i) の確かめ]　左辺 $= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ であり

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\frac{x}{h}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\log\left\{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\} \to \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[(ii) の確かめ] $x > 0$ のとき：$|x| = x$ であるから (i) と同じ。
$x < 0$ のとき：$t = -x$ とおくと $|x| = t > 0$ であるから合成関数の微分法により

$$(\log|x|)' = \frac{d\ \log t}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.12　指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

[確かめ]
$y = e^x$ とおく．$x = \log y$ であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[例]

(i) $(e^{ax})' = ae^{ax} \quad (a$；定数$)$

(ii) $(a^x)' = a^x \log a \quad (a$：1 でない正の定数$)$

[(i) の確かめ] $ax = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

左辺 $= \dfrac{d}{dx}e^{ax} = \dfrac{d}{dt}e^t \times \dfrac{dt}{dx}$

定理 4.12 より $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ だから

$= e^t \times a = a\, e^{ax} =$ 右辺.

[(ii) の確かめ] $a = e^{\log a}$ だから $a^x = e^{x \log a}$. これと (i) により

左辺 $= e^{x \log a} \log a =$ 右辺

$(a^x)' = a^x$ となるのは $a = e$ のときだけである。

初等関数の導関数

対数微分法

定理 4.13　対数微分

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[確かめ]　$t = f(x)$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \left(\frac{d}{dt}\log|t|\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

初等関数の導関数

対数微分法

[例] $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α : 実数の定数) の証明。

$y = x^{\alpha}$ とおき両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^{\alpha} = \alpha \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$