本日やること

1. 初等関数の導関数
   - 復習：関数の定義・合成関数
   - 逆関数の微分法
2. 指数関数
   - 微生物の増殖
   - 定数倍変化の法則
   - 有理数べき
   - 指数法則
   - 実数べき
   - 指数関数の定義
   - グラフ
   - 性質
3. 対数関数
   - 対数の定義
   - 対数の性質
   - 対数関数の定義

初等関数の導関数

復習：関数の定義・合成関数

復習：関数の定義

$D \subset \mathbb{R}$
D で定義された関数 f とは $x \in D$ に $y \in \mathbb{R}$ をただ１つ対応させる規則 のこと。

$$f \ : \ D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{または} \quad D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$f \ : \ x \longmapsto y \quad \text{または} \quad y = f(x)$$

で表す.
このとき y を x の f による**値** といい $f(x)$ で表す。
D : f の**定義域**　　$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$: f の**値域**　という

初等関数の導関数

復習：関数の定義・合成関数

復習：合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して, g の値域 $\subset$ f の定義域ならば

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in X$$

で決まる関数 $f \circ g$ を f, g の合成関数という.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "y = f \circ g(x)"] & T \arrow[r, "f"] & Y \\ x & t & y \end{tikzcd}$$

$$t = g(x) \qquad y = f(t)$$

.

初等関数の導関数

復習：関数の定義・合成関数

復習：定理 4.7.　合成関数の微分法

$y=f(t),\, t=g(x)$ ：微分可能 $\Rightarrow$ $y=f(g(x))$ ： 微分可能で

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \Big(\text{または}\,(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)\Big)$$

初等関数の導関数

復習：関数の定義・合成関数

[確かめ]

x	$\overset{g}{\longmapsto}$	t	$\overset{f}{\longmapsto}$	y
増分:Δx		増分:Δt		増分:Δy

とすると導関数の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad \frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

である。ここで

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \times \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

であるが, $\Delta x \to 0$ とすると $\Delta t \to 0$ でもあるから

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

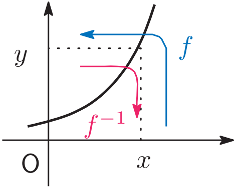
初等関数の導関数

逆関数

逆関数

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

$$y = f(x)$$



X : f の定義域
$Y = f(X)$: f の値域 のとき

関数 f が 1 対 1 であるとは

「$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$」であること。

このとき

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

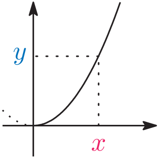
で決まる関数

$$f^{-1} : Y \to X$$

を f の逆関数という.

初等関数の導関数

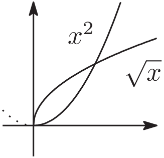
逆関数の微分法



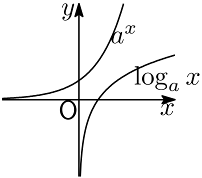
[例]

$y = x^2$, $(x \geqq 0)$ の逆関数は $x = \sqrt{y}$

変数 x, y をとりかえて $y = \sqrt{x}$ と表す必要は必ずしもない。



変数を取り換えて $y = \sqrt{x}$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。



$a > 0$, $a \neq 1$ とする。

$y = a^x$ の逆関数は $x = \log_a y$, $(y > 0)$

変数を取り換えて $y = \log_a x$ とすると，二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。

初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数の微分法

(i) 関数 $y = f(x)$ が区間 I で連続かつ狭義単調であるとすると逆関数が存在して連続である.

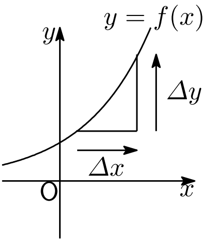
(ii) さらに $f(x)$ が I で微分可能で $f'(x) \neq 0$ ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も $f(I)$ で微分可能で次が成り立つ：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

初等関数の導関数

逆関数の微分法

[確かめ]　(i) は省略。(ii) は



$\Delta x (\neq 0)$: x の増分

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$: y の増分.

とすると

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$$

で f^{-1} は連続だから $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$

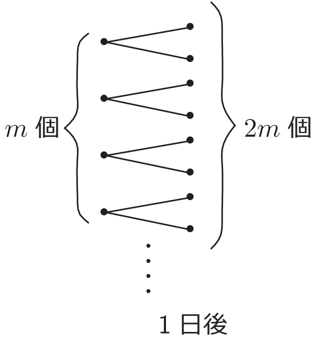
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

だからここで $\Delta x, \Delta y \to 0$ とすると $\displaystyle \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

指数関数

微生物の増殖

分裂して増殖することにより個体数が 1 日で 2 倍になる微生物がある。



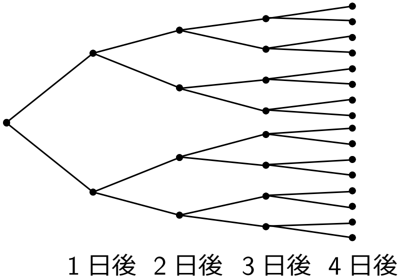
初めの個体数を m 倍にすると

$\Rightarrow$ 1 日後 $2m$ 倍となる。

m に比例する変化である.

指数関数

微生物の増殖



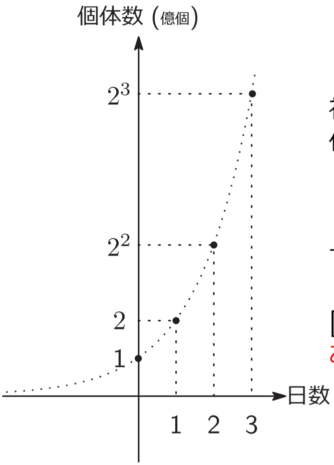
日数を n 倍とする

$\Rightarrow$ n 日後 2^n 倍となる。

等比数列的変化である。

指数関数

微生物の増殖



初めの個体数を 1 (億個) とすると n 日後の個体数は

$$2^n \ (\text{億個}), \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

である。

[本日の目標]　増殖は連続的変化であるはずである。t 日後 (t は実数) の個体数を決めたい。

指数関数

定倍率変化の法則

「1 日で a 倍に増殖する」 (a は正の定数)

を一歩進めて

「(どの時点から始めても) 一定の時間がたつと全個体中の一定割合の個体が分裂する」

「その結果 1 日後に a 倍になる。(a は正の定数)」

と考える。

t 日後の個体数を a^t と書くことにする。ただし t は実数である．これを実数冪 (べき) とよぶ。

指数関数

定倍率変化の法則

だから次のことが成り立つとしてよいだろう。

定倍率変化の法則

t が一定量 h だけ増加すると, a^t は t によらず一定の倍率 $u(h)$ で変化する。すなわち

$$\frac{a^{t+h}}{a^t} = u(h) \quad (u(h) \text{ は } t \text{ によらない}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ♠$$

これを定倍率変化の法則という。

指数関数

有理数べき

定倍率変化の法則が成り立つものと仮定して,

有理数べき $a^{\frac{n}{m}}$ $(m, n$ は整数$, m \neq 0)$

を決めたい。

t	-2	-1	0	1	2	3
a^t				a	a^2	a^3

だから

$$a^0 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

のように決まる。

指数関数

復習：累乗根

復習：累乗根

$a \geqq 0,\ n = 2, 3, \cdots$ に対し

$$x^n = a \text{ かつ } x \geqq 0$$

を満たす実数 x がただ 1 つ存在する．この x を a の（非負の）n 乗根といい $\sqrt[n]{a}$ で表す．

$n = 2$ のときは平方根： $x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a$ かつ $x \geqq 0$

$\sqrt{2} = 1.4142\cdots \qquad (1.4142)^2 \fallingdotseq 2.000$

$\sqrt[3]{2} = 1.25992\cdots \qquad (1.25992)^3 \fallingdotseq 2.000$

$\sqrt[4]{2} = 1.18921\cdots \qquad (1.18921)^4 \fallingdotseq 2.000$

指数関数

有理数べき

t	0	$\frac{n}{m}$	$\frac{2n}{m}$	n
a^t	1	x とおく		a^n

だから

$$x^m = a^n \qquad (x > 0 \text{ としてよいから} \Leftrightarrow \ x = \sqrt[m]{a^n})$$

だから

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ \text{Ⓒ}$$

と決まる。

指数関数

有理数べき

t	$-\frac{n}{m}$	0	$\frac{n}{m}$
a^t	x とおく	1	$\sqrt[m]{a^n}$

だから

$$x = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$$

だから

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓓ}$$

と決まる。

指数関数

指数法則

定倍率変化の法則 (♠) は

指数法則

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s \text{ は有理数} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\diamondsuit)$$

と同値である。なぜなら

$$\spadesuit \Leftrightarrow \frac{a^{t+s}}{a^s} = u(t) \quad (s \text{ によらない})$$
$$\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s u(t)$$

ここで $s = 0$ を代入すると $a^0 = 1,\ a^t = u(t)$ だから

$$\Leftrightarrow a^{t+s} = a^s a^t$$

指数関数

指数法則

まとめると

指数法則と有理数べき

指数法則　$a^{t+s} = a^t a^s, \quad t, s$ は有理数　………………… ◇

をみとめると有理数べきは

$$a^0 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (A)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (B)$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (C)$$

$$a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2, \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (D)$$

のように定められる。

指数関数

指数法則

指数法則と有理数べき

逆に A, B, C, D のように定めると指数法則が成り立つことが確かめられる。教科書 P.20 例 2.2 をみよ。

指数関数

指数法則

指数法則に追加

$a > 0,\ b > 0,\ t, s$ は有理数のとき

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iv) $(ab)^r = a^r b^r$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

指数関数

累乗根を含む式の計算

累乗根は有理数べきに直して指数法則を使って計算するのがよい。

[例]

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^3 \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a}} &= \left(a^3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}} \\
&= a^{\frac{15}{8}}
\end{aligned}
$$

指数関数

実数べき

実数べきの定義

実数 t に対してこれに近づいていく有理数の列 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ がある．このとき，$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \cdots$ が定義されるが，これらもある値に近づいていくことが知られている。この値を

$$a^t$$

と定める。これを実数べきという。

実数冪も指数法則を満たす

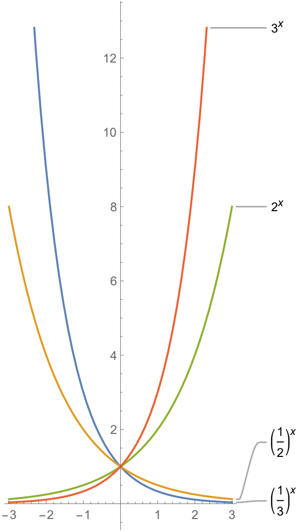
指数関数

定義

指数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．実数べきから作られる関数 $f(x) = a^x$ を，a を底とする x の指数関数とよぶ．
定義域は実数全体である．

指数関数
グラフ



$2, 2^2, 2^3, \cdots$ は激しく増加する。

実数べき 2^x は等比数列 2^n, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから，x が増加すると同様に激しく増加する。

$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$ は非常にはやく 0 に近づく。

実数べき $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は等比数列 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから，x が増加すると同様に非常にはやく 0 に近づく。

指数関数

性質

定理 2.1. 指数関数の性質

(I) 指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$, 値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である．また,

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加,

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少.

(II) すべての実数 $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

ただし, 関数 $f(x)$ が

狭義単調増加であるとは $t < s \Rightarrow f(t) < f(s)$ であること。

狭義単調減少であるとは $t < s \Rightarrow f(t) > f(s)$ であること。

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a > 0$, $a \neq 1$ を満たす定数とする．このとき，正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する．この p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し，a を底とする M の対数という．また，M を真数と呼ぶ．つまり

$$p = \log_a M \iff a^p = M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．$\log_a M$ はログ底 a の M と読む．

対数関数
対数の定義

特に

$$a^{\log_a M} = M$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a a = 1 \iff a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \iff a^0 = 1$$

注意すること

底の条件：$a > 0,\ a \neq 1$

真数条件：$M > 0$

対数関数

例

[例]

$\log_2 \sqrt{32}$ を求める.

$\log_2 \sqrt{32} = p$ とおくと 定義より

$\Leftrightarrow \ 2^p = \sqrt{32}$

ところで $\sqrt{32} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$ だから指数を比較して

$$p = \frac{5}{2}$$

対数関数

対数の性質

対数の性質

a, b : 1 でない正の数, $M > 0$, $N > 0$, k, x, p を実数とするとき

(i) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a \left(M^k\right) = k \log_a M$

(iv) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (底の変換公式)

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

対数関数

対数の性質

[(i) の確かめ]

$$\log_a M = t \text{ とおく} \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^t = M$$

$$\log_a N = s \text{ とおく} \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^s = N$$

かけ合わせて $a^t a^s = MN$

指数法則より $\parallel$

$$\log_a MN = t + s \quad \overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} \quad a^{t+s}$$

$$\parallel$$

$$\log_a M + \log_a N$$

対数関数

対数の性質

[(iv) の確かめ]

$$\log_a b = t \qquad \log_b c = s \quad \text{とおく}$$

定義より $\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$$a^t = b \qquad b^s = c$$

指数法則より

$$a^{ts} = (a^t)^s = b^s = c$$

定義より $\Updownarrow$

(iv) $\Longleftrightarrow$ $\log_a c = ts = \log_a b \log_b c$

対数関数

例

[例]

$X = \log_a x$, $Y = \log_a y$, $Z = \log_a z$ とおくと

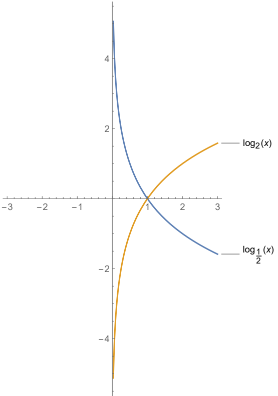
$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z = X + Y + Z$$

$$\begin{aligned}\log_a \frac{\sqrt{x}y}{\sqrt{z^3}} &= \log_a(x^{\frac{1}{2}}yz^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a x + \log_a y - \frac{3}{2}\log_a z \\ &= \frac{1}{2}X + Y - \frac{3}{2}Z\end{aligned}$$

指数関数
定義

対数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．関数 $f(x) = \log_a x$ を，a を底とする x の対数関数とよぶ．



定義域は 正の実数全体 $(0, \infty)$，値域は 実数全体 $\mathbb{R}$ である．また，

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加，

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少．

指数関数の逆関数である。