

本日より

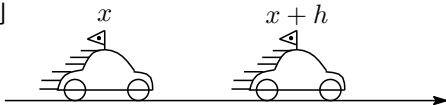
① 初等関数の導関数

- 初等関数
- べき関数の導関数
- 定数倍・和の微分法
- 積・商の微分法
- 合成関数の微分法

復習：微分係数・導関数

復習：微分係数・導関数

時刻



座標

$f(x)$

$f(x+h)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a における微分係数

a は定数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

導関数

x は変数

初等関数の導関数

初等関数

[初等関数]

$+$, $-$, \times , \div , $\sqrt[n]{\quad}$, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数を組み合わせて作られるような関数. (正式な定義ではない)

$$\frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, \quad \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad \log \left| x + \sqrt{A+x^2} \right|,$$
$$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx), \quad \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right),$$
$$\frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \log \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| \right), \dots$$

初等関数の導関数は初等関数。 (これから確かめます)

初等関数の導関数

べき関数の導関数

べき関数

$f(x) = x^\alpha$ (α は任意の実数の定数) で定義される関数をべき関数という。

定数関数の導関数

$f(x) = C$ (C : 定数) のとき $f'(x) = 0$ つまり

$$(C)' = 0 \quad (C \text{ は定数})$$

[確かめ] $f(x) = C$ だから定義より

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x の導関数

$f(x) = x$ のとき $f'(x) = 1$ つまり

$$(x)' = 1$$

[確かめ] $f(x) = x$ だから $f(x+h) = x+h$ で

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^2 の導関数

$f(x) = x^2$ のとき $f'(x) = 2x$ つまり

$$(x^2)' = 2x$$

[確かめ] $f(x) = x^2$ だから $f(x+h) = (x+h)^2$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^n の導関数

$f(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$) のとき $f'(x) = nx^{n-1}$ つまり

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

[確かめ] $f(x) = x^n$ だから $f(x+h) = (x+h)^n$. ここで

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + {}_n\text{C}_2x^{n-2}h^2 + \dots + h^n$$

だから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + (h \text{ について } 2 \text{ 次以上の項})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + (h \text{ について } 1 \text{ 次以上の項})) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\frac{1}{x}$ の導関数

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ のとき } f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \text{つまり}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \frac{1}{x}$ だから $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x - (x+h)}{x(x+h)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

\sqrt{x} の導関数

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ のとき } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{つまり}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \sqrt{x}$ だから $f(x+h) = \sqrt{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(x+h) - x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

まとめると

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} = (-1)x^{-2} = -1x^{-1-1}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

だから

べき関数の導関数

$f(x) = x^\alpha$ (α は定数) のような関数をべき関数という。べき関数の導関数は

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \text{ は実数の定数}$$

証明は後回しにします。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

[例]

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

定理 4.6 (定数倍・和の微分法)

$f(x), g(x)$: 微分可能, k : 定数 $\Rightarrow kf(x), f(x) + g(x)$ も微分可能で

$$(i) (kf(x))' = kf'(x)$$

$$(ii) (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

[(ii) の確かめ]

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \text{右辺} \end{aligned}$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

[例]

$$\begin{aligned}(2x^3 + 4x - 3)' &= (2x^3)' + (4x)' + (-3)' \\ &= 2(x^3)' + 4(x)' + (-3)' \\ &= 2 \times 3x^2 + 4 \times 1 + 0 \\ &= 6x^2 + 4\end{aligned}$$

初等関数の導関数

積・商の微分法

定理 4.9 (積・商の微分法)

$f(x), g(x)$: 微分可能

$\Rightarrow f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で (分母 $\neq 0$ である点で)

$$(i) (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{積の微分法})$$

$$(ii) \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (\text{商の微分法})$$

初等関数の導関数

積・商の微分法

[(i) の確かめ]

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

ここで $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \rightarrow f'(x)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \rightarrow g'(x)$, $g(x+h) \rightarrow g(x)$ だから
 $\rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

初等関数の導関数

[問題]:

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5 \text{ のとき,}$$

$$f'(x) = (2x + 3)^5 \quad ?$$

$$f'(x) = 5(x^2 + 3x + 2)^4 \quad ?$$

$$f'(x) = 5(2x + 3)^4 \quad ?$$

どれも誤り!

初等関数の導関数

合成関数

合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in X$$

で決まる関数 $g \circ f$ を f, g の合成関数という.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{f} & Y \\ x & & t & & y \\ & & t = g(x) & & y = f(t) \end{array}$$

初等関数の導関数

合成関数の例

[合成関数の例]

$y = f(t)$, $t = g(x)$ の合成関数は $y = f(g(x))$.

$y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = (x^2 + 3x + 2)^5$.

$y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

$y = \sin t$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sin(x^2 + 3x + 2)$.

初等関数の導関数

合成関数の微分法

定理 4.7. 合成関数の微分法

$y = f(t), t = g(x)$: 微分可能 $\Rightarrow y = f(g(x))$: 微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}, \quad (\text{または } (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x))$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[確かめ] 導関数の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

である。

$$g(x + \Delta x) - g(x) = \Delta t, \quad f(t + \Delta t) - f(t) = \Delta y$$

とすると $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta t = t + \Delta t$, $g(x) = t$ より
 $f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) = \Delta y$ だから

$$\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{g} & t & \xrightarrow{f} & y \\
 \text{増分: } \Delta x & & \text{増分: } \Delta t & & \text{増分: } \Delta y
 \end{array}$$

ここで

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \times \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

であるが、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすると $\Delta t \rightarrow 0$ でもあるから

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[例題] (1) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ の導関数を求める。

$y = f(x)$, $t = x^2 + 3x + 2$ とおく。

関数 $y = (x^2 + 3x + 2)^5$ は関数 $y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数である。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^5) = 5t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 5t^4 \times (2x + 3) = 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^4$$

である。