# 本日やること

1. 準備：順列・組み合わせ・二項定理
2. 微分係数・導関数
   - はやさと速度
   - 微分係数・導関数の定義
   - 微分係数とグラフの接線

# 準備：順列・組み合わせ・二項定理

## 順列・組み合わせ

**階乗**

$n = 0, 1, 2, \cdots,\quad 0 \leqq k \leqq n$ に対して $n$ の階乗は

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ のとき}, \\ 1 \times 2 \times \cdots \times n, & n \geqq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

# 準備：順列・組み合わせ・二項定理

## 順列・組み合わせ

**順列**

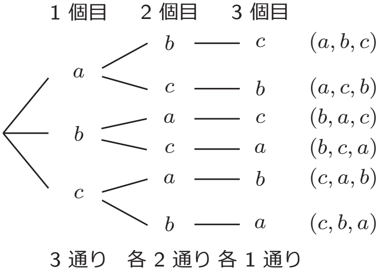
$n = 0, 1, 2, \cdots,\quad 0 \leqq k \leqq n$ に対して $n$ 個のものから $k$ 個取り出してならべる順列の数は

$$ {}_n\mathrm{P}_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} $$

.

[例]

$$ {}_3\mathrm{P}_3 = \frac{3!}{0!} = 3! = 6 $$



# 準備：順列・組み合わせ・二項定理

## 順列・組み合わせ

### 組み合わせ

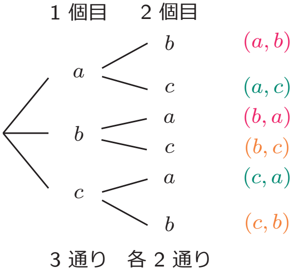
$n = 0, 1, 2, \cdots,\quad 0 \leqq k \leqq n$ に対して $n$ 個のものから $k$ 個取り出す**組み合わせの数**は

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{{}_n\mathrm{P}_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} $$

.

[例]

$$ {}_3\mathrm{C}_2 = \frac{3!}{1!2!} = 3 $$



# 準備：順列・組み合わせ・二項定理

## 二項定理

**二項定理**

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_n a^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_0 b^n \quad = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \, a^{n-k} b^k$$

[確かめ]　$(a+b)^n$ を展開すると

$$\begin{array}{cccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \text{取り出す} \\ a & b & a & \cdots & a & \end{array}$$

のように各 $(a+b)$ から $a$, $b$ の一方を取り出してかけ合わせたものの総和になる。

$a$ を $k$ 個 $b$ を $n-k$ 個取り出す場合の数は ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ だから正しい。

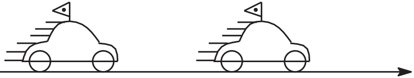
# 微分係数・導関数

## はやさと速度

### はやさと速度

はやさ $=\dfrac{\text{みちのり}}{\text{かかったじかん}}$ を精密化する

時刻 $t$ $t+h$



座標 $f(t)$ $f(t+h)$

(時刻 $t$ から $t+h$ までの) 平均の速度 $=\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

負の値も取りうることに注意

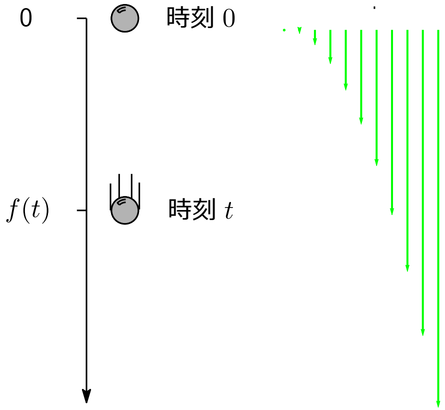
(時刻 $t$ の) 瞬間の速度を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ で定める。

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であることに注意

# 微分係数・導関数

## はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



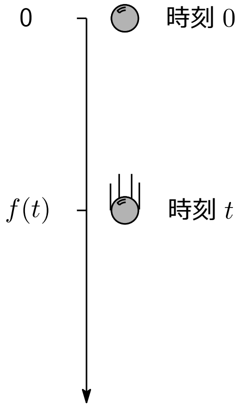

$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$

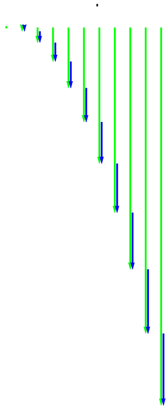
$(g$ : 重力加速度$)$

# 微分係数・導関数

## はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ \text{(m)}$$

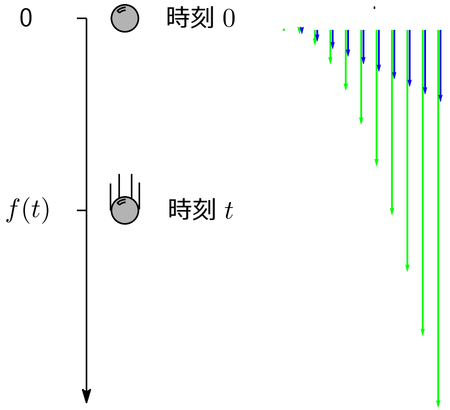
($g$ : 重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

# 微分係数・導関数
## はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]




$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (m)}$$
($g$ : 重力加速度)

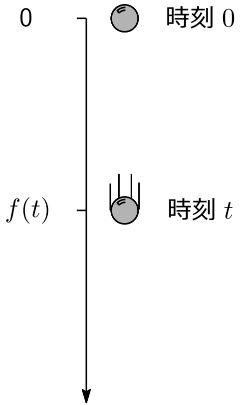
平均の速度

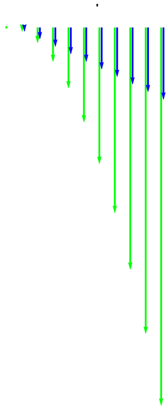
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$
$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

# 微分係数・導関数

## はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (m)

($g$ : 重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

ここで $h \to 0$ として極限をとると

瞬間の速度 $v = gt$ (m/s)

がえられる。

# 微分係数・導関数

## 運動の法則

Newton の運動の法則 その 3 運動方程式

物体に力 $F(t)$ が働くときその物体には

$$F(t) = ma(t)$$

で決まる加速度 $a(t)$ が生じる.

今の場合 $a(t) = g$ (一定) だから一定の力 $F = mg$ で引っ張られていることになる。これが重力。

平均の速度は $t$ に比例するとは言えないからこの法則は見えてこない。瞬間の速度を考えることが必要である。

# 微分係数・導関数

## 微分係数の定義

### 微分係数の定義

$f(x)$ が $x = a$ で (または点 $a$ で) 微分可能であるとは

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star) \text{ が存在すること}$$

$(\star)$ を $f(x)$ の $x = a$ におけるまたは点 $a$ における微分係数といい,

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots \text{で表す．つまり}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

# 微分係数・導関数

## 導関数の定義

### 導関数の定義

$f(x)$ が 区間 $I$ で微分可能であるとは, 区間 $I$ の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を, 関数 $f(x)$ の導関数といい, 記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す. つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

# 微分係数・導関数

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が点 $a$ で微分可能 $\Rightarrow$ 点 $a$ で連続
逆は成り立たない。

[確かめ]

$x \to a$ とするとき

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \to f'(a) \times 0$$

だから $f(x) \to f(a)$

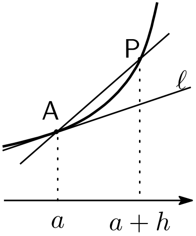
# 微分係数・導関数

## 微分係数とグラフの接線

### 微分係数とグラフの接線

$f(x)$ が点 $a$ で微分可能 $\Rightarrow$ グラフは点 A$(a, f(a))$ で接線を持つ.
ただし接線とは A をとおり傾き $f'(a)$ の直線の事とする. 方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$




[確かめ] P$(a+h, f(a+h))$ とおく

AP の傾き $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdots (\star)$

$\ell$ の傾き $= f'(a) \cdots (\star\star)$

$h \to 0$ とすると $(\star) \to (\star\star)$ だから AP$\to \ell$ と考えられる。したがって $\ell$ は接線。

# 微分係数・導関数

## 微分係数とグラフの接線

[例 4.2] 曲線 $y = x^2$ の点 $(1,1)$ における接線を求める。
$f(x) = x^2$ とおく。$x = 1$ における微分係数は

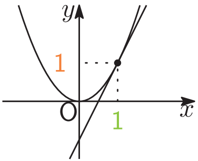
$$f'(1) = \lim_{h\to0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるが $h \neq 0$ としてよいから $h$ で約分ができて

$$= \lim_{h\to0} (2+h) = 2$$

接線は $(1,1)$ を通って傾き $f'(1) = 2$ の直線であるから方程式は

$$y - 1 = 2(x - 1)$$




整理して

$$y = 2x - 1$$

# 微分係数・導関数

## 微分係数とグラフの接線

[例 4.2] 曲線 $y = x^2$ の点 $(1,1)$ における接線を求める。
導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるが $h \neq 0$ としてよいから $h$ で約分ができて

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$