本日やること

1. 関数の極限
   - 関数の極限の定義
   - 関数の極限の性質
2. 連続関数
   - 連続関数の定義
   - 連続関数の性質
3. 三角関数
   - 三角比
   - 弧度法
   - 回転の角
   - 定義
   - グラフの作図

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad$「$x$ を $x \neq a$ の状態で定数 a に限りなく近づける」こと.

$f(x)$：関数，　α　：定数　のとき

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は極限 (値) α に収束する」とは

$\Leftrightarrow$「$x \to a$ のとき $f(x)$ は限りなく α に近づく」こと

記号　：　$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，　または　$f(x) \to \alpha$，$(x \to a)$　で表す。

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は発散する」　とは $\Leftrightarrow$「どんな α にも収束しない」こと

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は正の (負の) 無限大に発散する」とは

$\Leftrightarrow$「$x \to a$ のとき $\pm f(x)$ が限りなく大きくなる」こと

記号　：　$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$，　または　$f(x) \to \pm\infty$，$(x \to a)$　で表す。

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

$x \to a \pm 0 \quad \Leftrightarrow \quad$「$x$ を $x > a$ $(x < a)$ の状態で定数 a に限りなく近づける」こと.

$a = 0$ のときは $x \to \pm 0$ と書く

$x \to \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad$「$\pm x$ を 限りなく大きくする」こと.

このとき

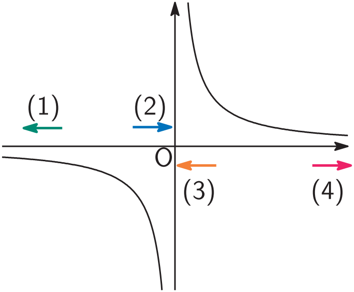
$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

も同様に定める。片側極限という。

関数の極限

関数の極限の例

[例 3.6]



$$(1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=-0,$$

$$(2)\ \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,$$

$$(3)\ \lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,$$

$$(4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=+0$$

関数の極限

関数の極限の性質

定理 3.9　関数の極限の性質

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とするとき,

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha$　　(k は定数)

(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$

(iv)　$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$　　(ただし, $\beta \neq 0$)

(v)　$f(x) \leqq g(x)$, $(n = 1, 2, \cdots) \ \Rightarrow\ \alpha \leqq \beta$.

(vi)　$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, $\alpha = \beta$

$\displaystyle\Rightarrow\ \lim_{x\to a} h(x) = \alpha = \beta$. (はさみうちの原理)

関数の極限

関数の極限の性質

[例]

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$$

関数の極限

関数の極限の性質

[注意 1.] 定理は $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$ のときも正しい。
[注意 2.]

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0 \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0$$

$$\frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$

$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty \qquad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty \qquad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$$

$$\text{実数} + (\pm\infty) = \pm\infty \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

と考えると $\alpha, \beta = 0, \infty$ のときも正しい。
[注意 3.] 形式的に

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \cdots$$

の形になる極限 (不定型の極限) は, 場合により結果が異なるので要注意。

関数の極限

関数の極限の性質

[例] $\dfrac{0}{0}$ 型不定形

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

は不可。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$x\to 1$ は x を $x\neq 1$ の状態で 1 に近づけること意味するから $(x-1)\neq 0$ で約分できるので

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

連続関数

連続関数の定義

連続関数の定義

$f(x)$：区間 I で定義された関数，　$a \in I$ のとき

(i) $f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 連続 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(a が区間の端点であるときは片側極限値を考える.)

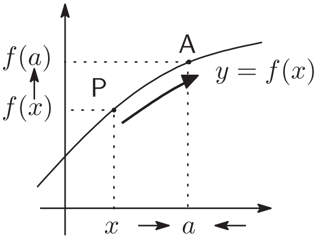
(ii) $f(x)$ が 区間 I で連続 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ が 区間 I の各点で連続

[連続でない関数の例]　教科書 58 ページを見よ。

連続関数

連続関数の性質

[連続関数のグラフ]



A$(a, f(a))$, P$(x, f(x))$ とする。
$f(x)$ が点 a で連続ならば

$$x \to a \ \Rightarrow \ f(x) \to f(a) \Rightarrow \ \mathrm{P} \to \mathrm{A}$$

だからグラフは点 A でつながっている。

$f(x), g(x)$ が (点でまたは区間で) 連続 $\Rightarrow$

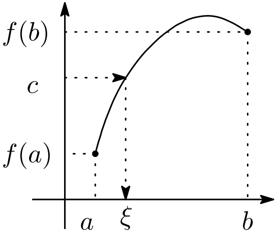
$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (分母 } \neq 0 \text{ となる点で) も連続}$$

だから多項式関数, 有理関数 は定義域で連続。
指数関数, 三角関数も作り方から連続であることがわかる。

連続関数

連続関数の性質

中間値の定理



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり，さらに $f(a) < f(b)$ であるならば，$f(a) < c < f(b)$ であるようなどんな実数 c に対しても

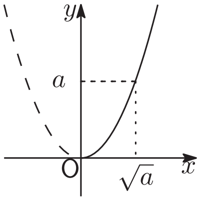
$$f(\xi) = c$$

を満たすような実数 ξ が区間 $[a, b]$ に少なくとも 1 つ存在する．$f(a) > f(b)$ であるときも同様である．

連続関数

連続関数の性質

[例]　平方根の存在

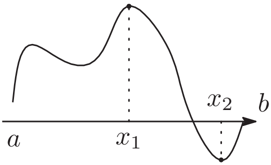


連続関数

連続関数の性質

最大値最小値の定理

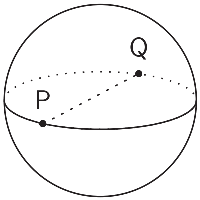
関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続であるならば $f(x)$ が最大値をとる点および最小値をとる点がこの区間に存在する.



連続関数

連続関数の性質

[例題]

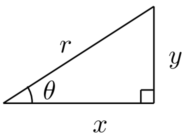


地球表面の気温分布は連続であるとする。赤道上の点 P とその裏側の点 Q で、気温が一致するものがあることを説明せよ。

三角関数

三角比

三角比の定義 (鋭角の場合)



角 θ が鋭角の場合, 図のような直角三角形を用いて

θ の正弦を $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

θ の余弦を $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

θ の正接を $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

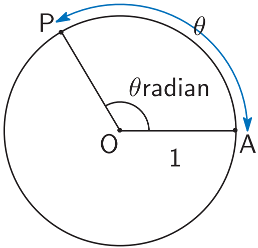
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角関数

弧度法

弧度法の定義



図のような半径 1 の円において

$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ radian (ラジアン)

であるとは

円弧 AP の長さ $= \theta$

であること

このような角の大きさのはかり方を弧度法という。普通、θ (rad) と書くが (rad) を省略することもある。

度数法と比較すると,

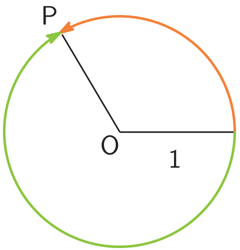
1 回転 $= 360^\circ$, 半径 1 の円の円周の長さ $= 2\pi$ だから

$$2\pi \text{ (rad)} = 360^\circ, \quad \pi \text{ (rad)} = 180^\circ, \quad \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} = 90^\circ, \cdots$$

三角関数

回転の角

回転の角の定義



P が原点中心半径 1 の円周上を回転しているとき

P の回転の角が θ (rad) であるとは

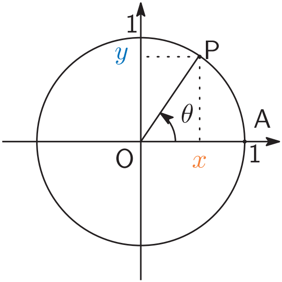
正の向きの回転のとき $\theta =$(P の軌跡の長さ)
負の向きの回転のとき $\theta = -$(P の軌跡の長さ)

であること．ただし

正の向きの回転 : 左回り (反時計回り) の回転
負の向きの回転 : 右回り (時計回り) の回転

三角関数
定義

三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1, 0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x, y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

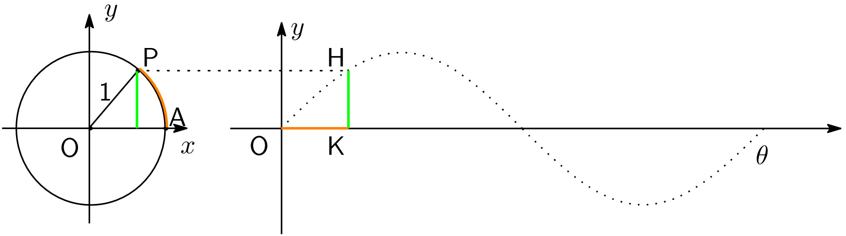
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という.

三角関数
グラフの作図

[$\sin\theta$ のグラフ]

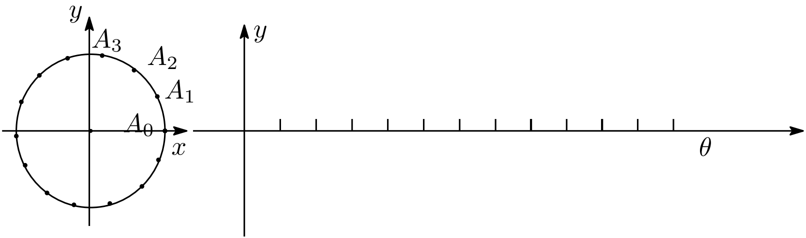


1. x, y 平面に原点中心の半径 1 の円を書き, 円周上に点 A$(1,0)$, P(x, y) をとる。$\angle$AOP$=\theta$ とすると三角関数の定義により, (弧 AP の長さ)$=\theta$, $y=\sin\theta$ となる。
2. 三角関数 $y=\sin\theta$ は θ に対して y を対応させる関数であるから, そのグラフは, θy 平面に点 H(θ, y) をとるとき, P を円周上で動かしたとき H がえがく曲線である。
3. 上の図を用いて $y=\sin\theta$ のグラフを書くには, K$(\theta, 0)$ とするとき, (弧 AP の長さ)=OK $(=\theta)$ となるように点 P をとらなければならない。

三角関数

グラフの作図

[座標軸の用意]

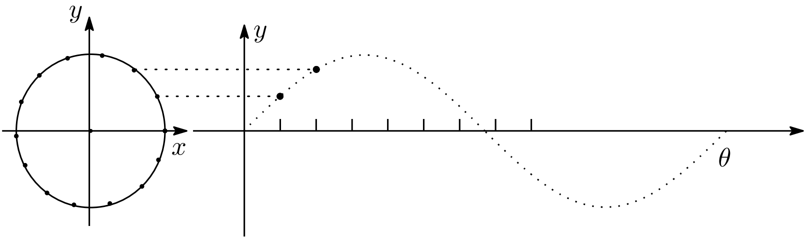


(0) 前のページの 3 のことを実現するために, 円筒のふちにグラフ用紙を細く切って巻き付けたものを使う。
(i) グラフ用紙を横長に使い、左側に xy 平面の座標軸、右側に θy 平面の座標軸を書け。用意した円筒を使って xy 平面に原点中心の円をかけ。円筒の直径を測って円筒の中心が原点に来るようにせよ。
(ii) 円筒に貼り付けてあるグラフ用紙のメモリを利用して、円周上に 1cm 間隔で点を打て。初めの点は x 軸上にとれ。(これらの点を $A_0, A_1, A_2, \cdots$ とする。)

三角関数

グラフの作図

[$y = \sin\theta$ のグラフの作図]

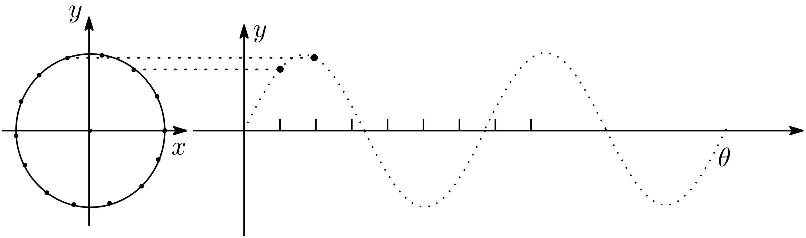


θy 平面に $y = \sin\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_1, A_2, \cdots$ の y 座標であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = \sin\theta$ のグラフがかける。

三角関数

グラフの作図

[$y = \sin 2\theta$ のグラフの作図]

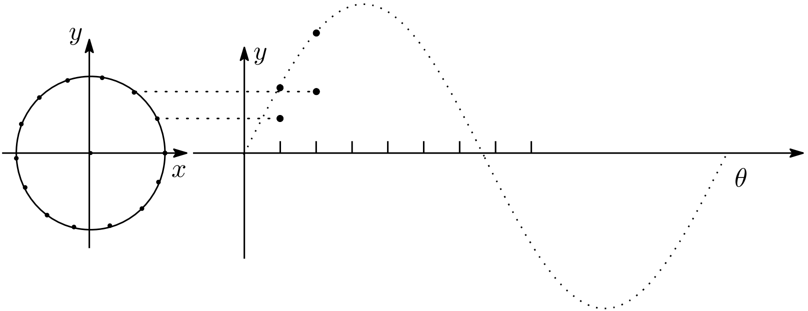


θy 平面に $y = \sin 2\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_2, A_4, \cdots$ の y 座標であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = \sin 2\theta$ のグラフがかける。

三角関数

グラフの作図

[$y = 2\sin\theta$ のグラフの作図]



θy 平面に $y = 2\sin\theta$ のグラフの概形をかこう．円筒の半径を 1 と見なす。
$\theta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して y 座標は $A_0, A_1, A_2, \cdots$ の y 座標の 2 倍であるような点を θy 平面に打っていき、なめらかに結べば、円筒の半径を 1 とした $y = 2\sin\theta$ のグラフがかける。

三角関数

グラフの作図

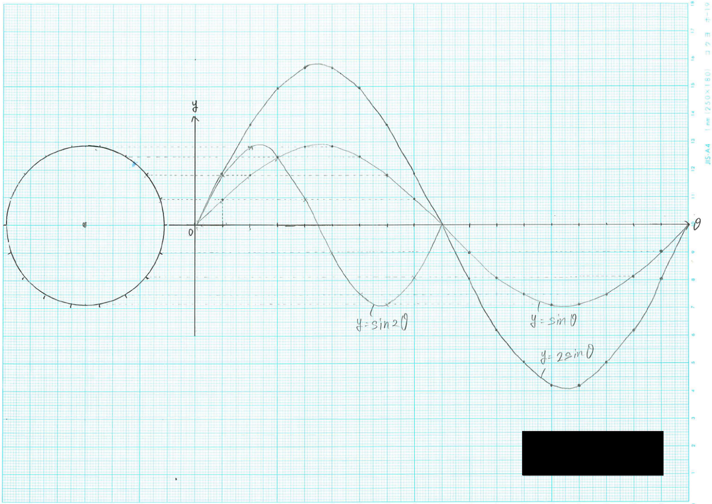
$\sin$ のグラフ

(1) $y = \sin\theta$ のグラフは周期 2π で繰り返す波形の曲線である。
(2) $y = \sin 2\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 方向に $\dfrac{1}{2}$ に押し縮めたものであり, 周期は半分振動数は 2 倍になる。
(3) $y = 2\sin\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを y 方向に 2 倍に拡大したものである。

$\sin 2\theta = 2\sin\theta$ は誤り。

三角関数

グラフの作図



[redacted]