本日やること

1. 数列の極限
   - 数列の極限の定義
   - 数列の極限の性質
   - ± 0, $\pm\infty$ を含む極限
   - 不定型の極限
   - 有界性・単調性
   - 有界な単調数列
   - 等比数列の極限

数列の極限

数列の復習

[数列]　ある規則によって並べられた実数の列

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ または $\{a_n\}$ のように表記.

[第 n 部分和]

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

[例]

$1, 1, 1, 1, \cdots,$　このとき $a_n = 1,\ S_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

$1, 2, 3, 4, \cdots,$　このとき $a_n = n,\ S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

$1, 2, 4, 8, \cdots,$　このとき $a_n = 2^{n-1},\ S_n = 2^n - 1$

数列の極限

数列の復習

[等差数列]

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad a_1\text{: 初項}, \ d\text{: 公差}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = a_1 \sum_{k=1}^{n} 1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + \frac{d}{2}(n-1)n$$

[等比数列]

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}, \qquad a_1\text{: 初項}, \ r\text{: 公比}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1 \times r^{k-1}) = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

数列の極限

数列の極限の定義

数列の極限の定義

$\{a_n\}$: 数列, α : 定数　のとき

「数列 $\{a_n\}$ は極限 (値) α に収束する」とは

$\Leftrightarrow$ 「n が限りなく大きくなる時 a_n は限りなく α に近づく」こと

記号 : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, または $a_n \to \alpha,\ (n \to \infty)$ で表す。

「数列 $\{a_n\}$ は発散する」とは $\Leftrightarrow$ 「どんな α にも収束しない」こと

「数列 $\{a_n\}$ は正の (負の) 無限大に発散する」とは

$\Leftrightarrow$ 「a_n $(-a_n)$ が限りなく大きくなる」こと

記号 : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, または $a_n \to \pm\infty,\ (n \to \infty)$ で表す。

[例] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ は明らかでしょう。

数列の極限

数列の極限の性質

定理 3.3　数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき，

(i) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　(k は定数)

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \alpha\beta$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　(ただし，$\beta \neq 0$)

(v) さらに $a_n \leqq b_n$，$(n = 1, 2, \cdots)$ のときは $\alpha \leqq \beta$.

(vi) $a_n \leqq c_n \leqq b_n$，$(n = 1, 2, \cdots)$, $\alpha = \beta$
のときは $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha = \beta$. (はさみうちの原理)

数列の極限

数列の極限の計算方法

[例] これらを組み合わせて,

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to a, b_n \to b, c_n \to c, d_n \to d$$

ならば

$$\frac{3a_n - 2b_n}{c_n(d_n - 2)} \to \frac{3a - 2b}{c(d-2)}$$

などとできる。例えば

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{n \times \frac{1}{n}}{(2n-1) \times \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$$

$$\left(\text{ここで } \frac{1}{n} \to 0 \text{ だから} \right)$$

$$\to \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

数列の極限

±0, ±∞ を含む極限

$\boldsymbol{n} \to \infty$ のとき

「$a_n > 0$ かつ $a_n \to 0$」を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +0$ または $a_n \to +0$ で表す。

「$a_n < 0$ かつ $a_n \to 0$」を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -0$ または $a_n \to -0$ で表す。

[例] $a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} \to +0$ が分かっている。

[例] $a_n \to$ 正の数, $b_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to +0$ が分かっている。

このことから $\dfrac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0$ と約束すると定理 3.3 の (iv) は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{+\infty} = 0$$

となるので $\alpha > 0,\ \beta = +\infty$ の時も成り立つ。

同様に

数列の極限

± 0, $\pm\infty$ を含む極限

± 0, $\pm\infty$ を含む極限の約束

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0 \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0$$

$$\frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$

$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty \qquad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty \qquad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$$

$$\text{実数} + (\pm\infty) = \pm\infty \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

[例] $n \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{n} \to \frac{1}{+\infty} = +0$$

$$\frac{1}{2n-1} \to \frac{1}{2 \times (+\infty) - 1} = \frac{1}{(+\infty) - 1} = \frac{1}{(+\infty)} = +0$$

数列の極限

不定型の極限

不定型の極限

形式的に

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \cdots$$

の形になる極限は，場合により結果が異なるのでこの計算はやってはいけない。 これらを不定形の極限という。

[例] $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定型の極限は場合によって異なる。

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{2n^2-1} = \frac{1}{2n-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{+\infty-0} = 0$$

数列の極限

有界性・単調性

有界な数列

数列 $\{a_n\}$ が**上に (下に) 有界**

$\Leftrightarrow$ ある数 M があって $a_n \leqq M$ ($\geqq M$) $(n = 1, 2, \cdots)$

数列 $\{a_n\}$ が**有界**

$\Leftrightarrow$ 上に有界かつ下に有界

単調な数列

数列 $\{a_n\}$ が**単調増加 (単調減少)**

$\Leftrightarrow$ $a_n \leqq a_{n+1}$ $(a_n \geqq a_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$

数列 $\{a_n\}$ が**狭義単調増加 (狭義単調減少)**

$\Leftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$

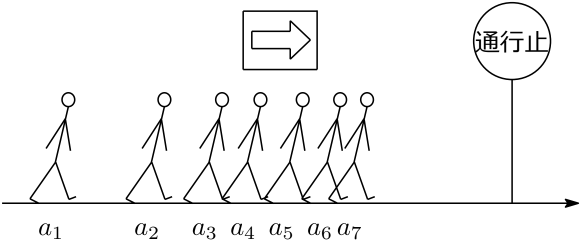
数列の極限

有界な単調数列

有界な単調数列の極限

上に有界な単調増加数列は収束する．また，下に有界な単調減少数列 は収束する．

もちろん有界でない単調数列は ∞ か $-\infty$ に発散する．しかし，有界ならば必ず収束することを証明するためには実数の連続性が必要である．ここでは証明は省略する．



数列の極限

等比数列の極限

等比数列の単調性・極限

等比数列 $\{r^n\}$ は

(i)

$$r > 1 \ \Rightarrow\ \text{狭義単調増加}$$

$$0 < r < 1 \ \Rightarrow\ \text{狭義単調減少}$$

$$r < 0 \ \Rightarrow\ \text{単調でない}$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty \text{ に発散} & (\ r > 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (\ r = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ |r| < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (\ r \leqq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

数列の極限

等比数列の極限

[確かめ] $r > 1$ の場合。

両辺 r^n をかけると $r^{n+1} > r^n$ だから狭義単調増加。

$a = r - 1 > 0$ とおくと

$$r^n = (1+a)^n = 1 + na + \cdots > 1 + na$$

である。ところで $n \to \infty$ とするとき $1 + na \to +\infty$ だから $r^n \to +\infty$.

$0 < r < 1$ の場合。

両辺 r^n をかけると $r^{n+1} < r^n$ だから狭義単調減少。

$b = r^{-1}$ とおくと $b > 1$ であり $b^n \to +\infty$.

$$r^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \to \frac{1}{+\infty} = +0$$