# 建設基礎数学 A　第 11 回　解答

**問題 1.**　次の関数 $f(x)$ の増減・凹凸を調べ, 極値および変曲点を求めよ. また, グラフの概形を描け.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$,

[増減を調べる]

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ のとき。また

$x < 0$ のとき $x < 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

$0 < x < 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) < 0$, だからここで狭義単調減少

$x > 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

[凹凸を調べる]

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき。また

$x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

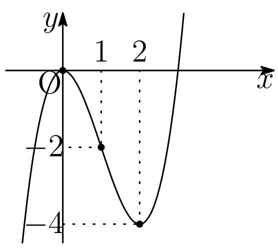
$x > 1$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[増減表を書く] 以上から増減・凹凸を調べると

| $x$ | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | ↗ | 0 | ↘ | $-2$ | ↘ | $-4$ | ↗ |

となる. ここで ↗ は単調増加かつ上に凸, ↘ は単調減少かつ上に凸, ↘ は単調減少かつ下に凸, ↗ は単調増加かつ下に凸 を表す。

だから $x = 0$ で極大値 $0$ をとり $x = 2$ で極小値 $-4$ をとる. 変曲点は $(1, -2)$.



(2) $f(x) = x\,e^{-x}$ とする。

$(e^{ax})' = ae^{ax}$, ($a$ は定数) に注意！

[増減を調べる] 積の微分法により

$f'(x) = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x\,(e^{-x})' = e^{-x} + x\,(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

である。だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき。またすべての $x$ に対して $e^{-x} > 0$ だから

$x < 1$ のとき $1 - x > 0$ だから $f'(x) > 0$, だからここで狭義単調増加

$1 < x$ のとき $1 - x < 0$ だから $f'(x) < 0$, だからここで狭義単調減少

[凹凸を調べる]

$f''(x) = ((1-x)e^{-x})' = (1-x)'e^{-x} + (1-x)\,(e^{-x})' = -e^{-x} + (1-x)\,(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = 2$ のとき。また

$x < 2$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

$x > 2$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[極限を調べる]

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{\infty} = +\infty$,

$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = +0$,

$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = +0$, $(n = 1, 2, \cdots)$ (演習問題 No.10 の解説を見てください。)

に注意すると

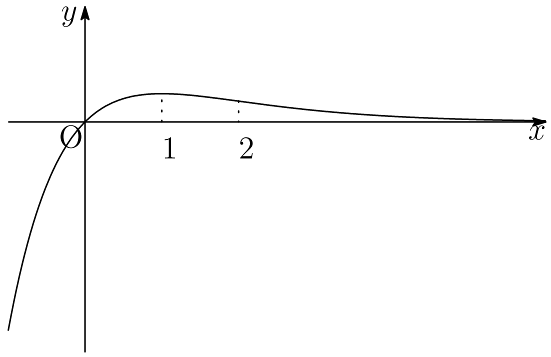
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = x\,e^{-x} = (-\infty)\infty = -\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x) = +0$.

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $e^{-1}$ | ↘ | $2e^{-2}$ | ↘ | $0$ |
| | | | | | 極大 | | 変曲点 | | |

だから $x = 1$ で極大値 $e^{-1}$ をとり, 変曲点は $(2, 2e^{-2})$.




(3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$,

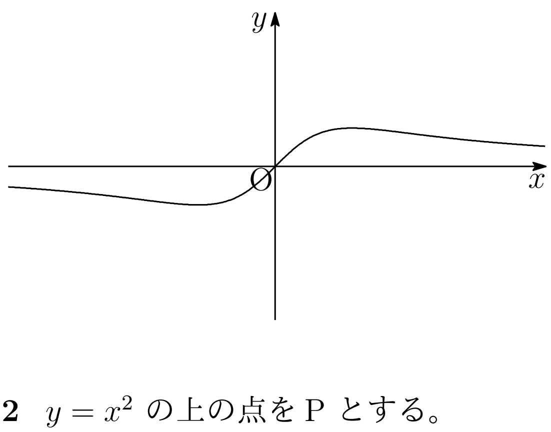
$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$f''(x) = \dfrac{2(x^3-3x)}{(x^2+1)^3}$

だから増減表を書くと

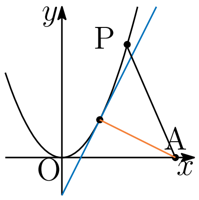
| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $-\dfrac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\searrow$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $0$ |
| | | | 変曲点 | | 極小 | | 変曲点 | | 極大 | | 変曲点 | | |

だから $x=-1$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとり $x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる.




**問題.2** $y = x^2$ の上の点を P とする。

(1) P と点 A$(3,0)$ の距離が最小になるような P を求めよ。




$\mathrm{P}(x, x^2)$, $\mathrm{A}(3, 0)$ とするとき

$\mathrm{AP}^2 = (x-3)^2 + (x^2-0)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$　$(= f(x)$ とおく$)$

を最小にする $x$ を求めればよい。

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = (x-1)(4x^2+4x+6) = (x-1)((2x+1)^2+5)$$

だから $x = 1$ で極小値 $f(1) = 5$ をとる。だから距離が最小になる P は $(1, 1)$.

(2)　(1) で求めた P における接線と AP が直交することを確かめよ。

$(1, 1)$ での接線 の傾きは $f'(1) = 2$.

AP の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

だから直交する。