# 建設基礎数学 A
# 第 10 回 解答

**1** (1) $f^{(n)}(x)=e^x$ だから $f^{(n)}(0)=e^0=1\cdots(\star)$, $(n=1,2,\cdots)$

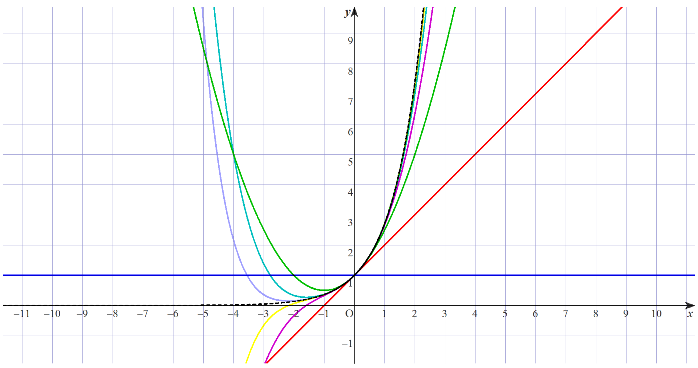
(2) 関数 $f(x)$ の $n$ 次のマクローリン近似多項式 $P_n(x)$ は

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\ \cdots(\star\star)$$

であるが, $(\star)$ を代入して

$$P(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

$Nn=0,\cdots,5$ に対して $P(x)$ を図示する。点線は $y=e^x$ のグラフである。




**2**

(1) $f(x)=\sin x$ とするときの 9 次までのマクローリン近似多項式 $P_n(x)$, $n=0,1,\cdots,9$ を計算せよ. また, Grapes を用いてグラフを書いてみよ。

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ n=0,1,2,\cdots$$

だから

$$f'(0)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$f''(0)=\sin\frac{2\pi}{2}=0,$$

$$f^{(3)}(0)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1,$$

$f^{(4)}(0) = \sin\frac{4\pi}{2} = 0,$

$f^{(5)}(0) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1,$

$f^{(6)}(0) = \sin\frac{6\pi}{2} = 0,$

$f^{(7)}(0) = \sin\frac{7\pi}{2} = -1,$

$f^{(8)}(0) = \sin\frac{8\pi}{2} = 0,$

$f^{(9)}(0) = \sin\frac{9\pi}{2} = 1,$

これらを $(\star\star)$ に代入して

$$
\begin{aligned}
&P_0(x) = 0,\\
&P_1(x) = x,\\
&P_2(x) = x,\\
&P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!},\\
&P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!},\\
&P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\\
&P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\\
&P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},\\
&P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},\\
&P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}
\end{aligned}
$$

(2) $f(x) = \cos x$ とするときの 8 次までのマクローリン近似多項式 $P_n(x)$, $n = 0, 1, \cdots, 8$ を計算せよ．また, Grapes を用いてグラフを書いてみよ。

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 0, 1, 2, \cdots$

だから,

$$f'(0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$
$$f''(0) = \cos\frac{2\pi}{2} = -1,$$
$$f^{(3)}(0) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0,$$
$$f^{(4)}(0) = \cos\frac{4\pi}{2} = 1,$$
$$f^{(5)}(0) = \cos\frac{5\pi}{2} = 0,$$
$$f^{(6)}(0) = \cos\frac{6\pi}{2} = -1,$$
$$f^{(7)}(0) = \cos\frac{7\pi}{2} = 0,$$
$$f^{(8)}(0) = \cos\frac{8\pi}{2} = 1,$$

したがってこれらを $(\star\star)$ に代入して

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= 1, \\
P_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!}, \\
P_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!}, \\
P_4(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \\
P_5(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \\
P_6(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \\
P_7(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}, \\
P_8(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}
\end{aligned}$$

**3** Taylor の定理を利用して次の事を確かめよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$

$\sin x$ にマクローリンの定理を $n=3$ として適用すると，ある数 $0<\theta<1$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta x)\, x^5}{5!}$$

がわかる．これを左辺に代入すると

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta x) x^5}{5!} - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{\sin(\theta x)\, x^2}{5!}$$

$|\sin(\theta x)| \le 1$ に注意すると $x \to 0$ のとき $\dfrac{\sin(\theta x)\, x^2}{5!} \to 0$ だから

$$\frac{\sin x - x}{x^3} \to -\frac{1}{6}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\, e^{-x} = 0.$

$e^x$ にマクローリンの定理を $n=4$ として適用すると，ある数 $0<\theta<1$ があって

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^{\theta x} x^5}{5!}$$

すべての項は $>0$ だから

$$> \frac{x^4}{4!}$$

がわかるから

$$0 < \frac{x^3}{e^x} < \frac{x^3}{\frac{x^4}{4!}} = \frac{4!}{x}$$

である．ところで $x \to +\infty$ とすると最後の項は $\to 0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\, e^{-x} = 0.$ がわかる．

これは $x \to \infty$ としたとき $e^x$ は $x^3$ よりも速く増加することを意味する。

じつは同じ方法で $\lim\limits_{x\to\infty} x^N\, e^{-x} = 0,\ (N = 1, 2, \dots)$ もわかる。